جامعة تكريت

كلية التربية / طوز خورماتو

قسم الفيزياء

الكهربائية والمغناطسية

للمرحلة الثانية

مدرس المادة

نهاد علي شفيق عباس

الفصل التاسع

مصادر المجال المغناطيسي

Magnetic Field Sources

الفصل التاسع

مصادر المجال المغناطيسي

(Magnetic Field Sources)

1-9 تمهيد

تعرفنا في الفصل السابق على المجال المغناطيسي والقوة التي يؤثر بها هذا المجال على شحنة كهربائية موجودة في منطقة تأثيره. كما استعرضنا بعض التطبيقات العملية لآثار المجال المغناطيسي والقوة المغناطيسية الناتجة عنه، دون البحث في الكيفية التي نشأ عنها هذا المجال ودون حساب شدته عند النقاط الواقعة في منطقة تأثيره. ومن المعروف أنّ أهم مصادر المجال المغناطيسي هو التيار الكهربائي باعتباره شحنات متحركة. وفي هذا الفصل سنبين كيفية حساب شدة المجال المغناطيسي الناشئ عن تيار كهربائي عند أية نقطة في منطقة تأثيره بطريقتين. تعتمد الأولى منهما على قانون بيوت وسافارت ، الذي يُمكننا من حساب شدة المجال المغناطيسي لأي توزيع من التيارات الكهربائية. وتعتمد الطريقة الثانية على قانون أمبير، الذي يُبسّط حساب المجال المغناطيسي في الحالات ذات التّماثل العالي لتوزيع التيارات الكهربائية. كما سنتعرف على كيفية حساب القوة المغناطيسية المتبادلة بين موصلين متوازيين يمر خلال كل منهما تيار كهربائي. وعلى كيفية حساب المجال المغناطيسي لثنائي قطبي مكون من عروة تيار. وأخيرا سنناقش باختصار الخواص المغناطيسية للمواد.

2-9 قانون بيوت وسافارت (Biot- Savart Law)

بعد اكتشاف أورستد (عام 1820)، للتأثير المغناطيسي الناتج عن التيار الكهربائي بفترة وجيزة، قام بيوت وسافارت بإجراء عدة تجارب لإيجاد صيغة رياضية لحساب شدة المجال المغناطيسي الناشئ عن مرور التيار الكهربائي في أسلاك موصلة مختلفة الأشكال. واستنتج بيوت وسافارت من تجاربهما تلك أنّ المجال المغناطيسي dB، عند نقطة مثل P، الناشئ عن أحد عناصر التيار $i\,dl$، لسلك طوله l ويحمل تيارا i، انظر الشكل (9-1)، يتصف بما يلي:

أولا: يكون اتجاه المجال المغناطيسي dB عموديا على كل من عنصر التيار $i\,dl$ والمتجه r الواصل بين عنصر التيار والنقطة P.

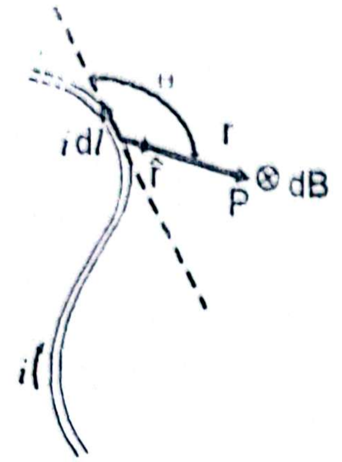
ثانيا: تتناسب قيمة شدة المجال المغناطيسي dB:

(أ) طرديا مع قيمة عنصر التيار $i\,dl$.

(ب) عكسيا مع r^2.

(د) طرديا مع $\sin\theta$، حيث تُمثّل θ الزاوية المحصورة بين المتجه $\mathbf{r}$ وعنصر التيار $i\,dl$.

ويمكن التعبير عن استنتاجات بيوت وسافارت المتعلقة بمقدار dB بالمعادلة التالية:



الشكل (9-1)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl\sin\theta}{r^2} \qquad (1\text{-}9)$$

حيث يُمثّل المقدار $\frac{\mu_0}{4\pi}$ ثابت التناسب ويساوي 10^{-7} T.m/A. ويُمثّل μ_0 مقدارا ثابتا يعرف بثابت إنفاذية (Permeability) الفراغ للتأثير المغناطيسي. أي أنّ:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T.m/A}$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (9-1) بصيغة متجهية على النحو التالي:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl \times \hat{r}}{r^2} \qquad (2\text{-}9)$$

وتُعرف المعادلة (9-2) بقانون بيوت وسافارت. وتدل المعادلة السابقة على أنّ dB باتجاه حاصل الضرب المتجهي($i\,dl \times \hat{r}$)، أي أنّ dB عمودي على كل من $\hat{r}$ و $i dl$.

يعطي قانون بيوت وسافارت المجال المغناطيسي الناتج عن عنصر تيار. ولحساب المجال المغناطيسي الكلي عند النقطة P في الشكل (9-1)، الناتج عن جميع عناصر التيار نجري عملية مكاملة للمعادلة (9-2)، على النحو التالي:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,dl \times \hat{r}}{r^2} \qquad (3\text{-}9)$$

وتحتاج هذه المعادلة إلى حذر شديد عند إجراء التكامل لاحتوائها على كميات متجهة. ويصبح التكامل سهلا عندما يكون السلك الحامل للتيار ذا شكل هندسي منتظم، كما سيتضح من الأمثلة الآتية.

يُعطي قانون بيوت- سافارت، وهو قانون أُستقيَ من التجربة، شدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار (أو توزيع من التيارات) عند نقطة ما.

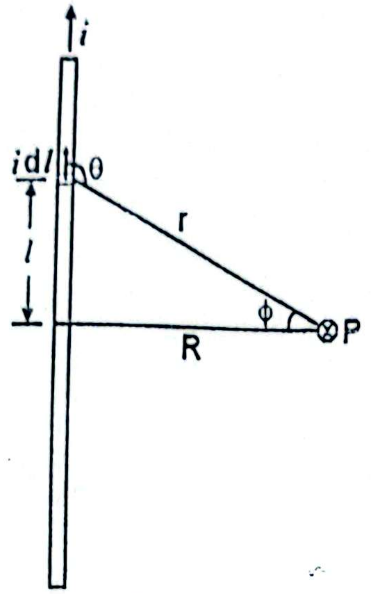
مثال (1-9): المجال المغناطيسي الناشئ عن سلك مستقيم ناقل لتيار كهربائي

يبين الشكل (2-9)، سلكا رفيعا طوله D ويحمل تيارا شدته i. أوجد المجال المغناطيسي عند نقطة مثل P تقع على العمود المنصف للسلك وعلى بعد R منه.

الحل:

لكي نتمكن من استخدام قانون بيوت وسافارت في حساب المجال المغناطيسي، نأخذ عنصر تيار $i\,dl$، على بعد l من منتصف السلك ونجد المجال المغناطيسي الناتج عنه، وذلك بتطبيق المعادلة (3-9).

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,dl \times \hat{r}}{r^2}$$



الشكل (2-9)

نبدأ بتحديد اتجاه المجال B عند النقطة P، وذلك لتبسيط عملية المكاملة، حيثُ نلاحظ من تطبيق قاعدة اليد اليمنى، بجعل الإبهام ممثلا لاتجاه التيار وأصابع اليد الأربعة الأخرى ممثلة لاتجاه المجال، أنّ اتجاه المجال يكون عموديا على مستوى الورقة وداخلا فيها. أما مقدار المجال B عند النقطة P فنحصل عليه بإجراء عملية التكامل بعد التخلص من الاتجاهات فيها، كما يلي:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

ويلزم تمثيل كافة المتغيرات في المعادلة السابقة (l و θ و r) بدلالة متغير واحد لكي نتمكن من إجراء التكامل. وبنظرة فاحصة إلى الشكل (2-9)، نلاحظ أنّ تمثيل هذه المتغيرات بدلالة الزاوية ϕ يبسط عملية التكامل كثيرا، حيثُ نلاحظ أنّ:

$$\theta = \phi + 90^\circ$$

ومن ثم فإنّ:

$$\sin\theta = \sin(\phi + 90^\circ) = \cos\phi$$

و

$$r = R/\cos\phi$$

و

$$l = R\tan\phi$$

وبالتالي فإنّ:

$$dl = R \sec^2 \phi \, d\phi$$

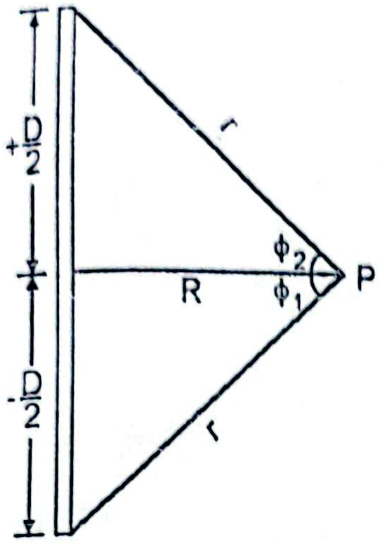
وتلاحظ من الشكل (3-9)، أنّ dl تتغير من $-\frac{D}{2}$

إلى $+\frac{D}{2}$، ويتبع ذلك تغير في الزاوية ϕ من ϕ_1 إلى ϕ_2

حيث:

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-D}{2R}\right)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{+D}{2R}\right)$$



الشكل (3-9)

وبالتعويض عن قيم المتغيرات هذه في معادلة المجال السابقة، نجد أنّ:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{(R \sec^2 \phi \, d\phi) \cos \phi}{(R^2/\cos^2 \phi)}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi \, d\phi$$

وبإجراء التكامل في المعادلة السابقة ينتج أنّ:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} (\sin\phi_2 - \sin\phi_1) \qquad (4-9)$$

ويتضح من الشكل (3-9)، أنّ:

$$\sin\phi_1 = \frac{-D}{2r} = \frac{-D}{2\sqrt{(D^2/4)+R^2}} = \frac{-D}{\sqrt{D^2+4R^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+(2R/D)^2}}$$

وبالمثل فإنّ:

$$\sin\phi_2 = \frac{+D}{2r} = \frac{+D}{2\sqrt{(D^2/4)+R^2}} = \frac{+D}{\sqrt{D^2+4R^2}} = \frac{+1}{\sqrt{1+(2R/D)^2}}$$

وبالتعويض عن قيمتي $\sin \phi_1$ و $\sin \phi_2$ في المعادلة (4-9) ينتج أن

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{1+(2R/D)^2}}$$

■ مثال (9-2) :

أوجد شدة المجال المغناطيسي B عند النقطة P في المثال السابق عندما يكون السلك لانهائي الطول.

الحل:

لا تختلف خطوات حل هذا المثال عن سابقه إلا بقيم حدود التكامل من ϕ_1 إلى ϕ_2. فعندما يكون السلك لا نهائي الطول، تتغير ϕ من $-90°$ $(D = -\infty)$ إلى $+90°$ $(D = +\infty)$. وبالتعويض في المعادلة (9-4) نجد أنَّ:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(\sin 90° - \sin(-90°)\right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left[2\sin 90°\right]$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \qquad (9\text{-}5)$$

ونلاحظ من هذه العلاقة أنَّ شدة المجال المغناطيسي متساوية عند جميع النقاط الواقعة على محيط دائرة نصف قطرها R ويمر في مركزها السلك بحيثُ يكون عموديا على مستواها. ويفسر هذا نمط خطوط المجال المغناطيسي الناتج عن سلك حامل للتيار، التي تكون على شكل دوائر حول السلك، انظر الشكل (8-1 أ).

شدة المجال المغناطيسي الناتج عن سلك لانهائي الطول يحمل تياراً شدته i في نقطة ما تبعد المسافة R عنه تتناسب طرديا مع i وعكسيا مع R.

■ **مثال (9-3) : المجال المغناطيسي الناشئ عن عروة تيار (ثناقطبي مغناطيسي)**

حلقة دائرية نصف قطرها R تقع في المستوى (yz) وتحمل تيارا شدته i. احسب المجال المغناطيسي عند نقطة تقع على المحور x المار في مركز الحلقة والعمودي على مستواها، وعلى بعد a عن مركزها كما في الشكل (9-4).

الحل:

نأخذ عنصر تيار $i\, dl$ من الحلقة، كما فعلنا في المثال (9-1)، ونجد dB الناتج عنه بتطبيق قانون بيوت وسافارت:

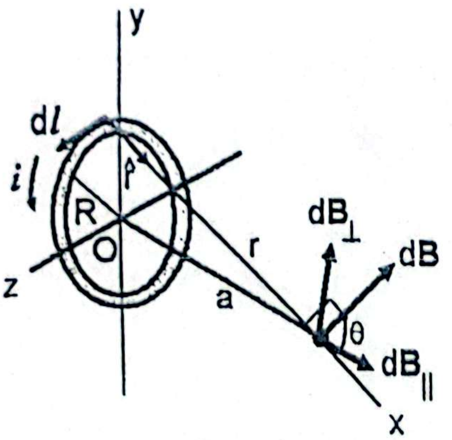
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \hat{r}}{r^2}$$

تلاحظ من الشكل (9-4) أنَّ المتجه $\hat{r}$ يكون دائما عموديا على المتجه dl لجميع العناصر المكونة للحلقة. أي أنَّ الزاوية بين $\hat{r}$ و dl تساوي دائما $90°$. وهكذا فإنَّ:

$$\left|dl \times \hat{r}\right| = dl \sin 90° = dl$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

وقبل إجراء التكامل لهذه المعادلة يجب الانتباه إلى أنّ اتجاهات dB الناتجة عن العناصر المكونة للحلقة تختلف من عنصر لآخر، ولكنها تمتاز في كونها عمودية على r كما في الشكل (4-9). لذلك نستفيد من التماثل الموجود في شكل المجال ونحلل dB إلى مركبتين، إحداهما عمودية على المحور x (المركبة $dB_\perp$)، والأخرى موازية له (المركبة $dB_{||}$).



الشكل (4-9)

ومن ثم نأخذ تكامل كل مركبة على انفراد. ومن التماثل في الشكل نلاحظ أنّ المركبات العمودية ($dB_\perp$) للمجال الناتجة عن العناصر المتناظرة للحلقة سوف تلغي بعضها بعضاً. أي أنّ:

$$\int dB_\perp = 0$$

أما المركبات الموازية للمحور x فجميعها تؤثر باتجاه واحد. لذلك تجمع مع بعضها لتُمثل محصلة المجال المغناطيسي عند النقطة P. أي أنّ:

$$B = \int dB_{||} = \int dB\cos\theta$$

حيثُ تُمثل θ الزاوية المحصورة بين المجال dB والمحور x كما في الشكل. وبالتعويض عن قيمة dB في المعادلة السابقة ينتج أنّ:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{dl\cos\theta}{r^2}$$

ونلاحظ من الشكل أنّ الزاوية θ ثابتة بالنسبة لجميع أجزاء العروة، وأنّ:

$$\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\left(a^2+R^2\right)^{1/2}}$$

وبالتعويض عن cos θ وإخراج الثوابت من التكامل، تصبح المعادلة السابقة كما يلي:

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}\int dl$$

ولكن:

أي أنّ:

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2\left(a^2 + R^2\right)^{3/2}} \qquad (6\text{-}9)$$

ويؤثر هذا المجال باتجاه محور x الموجب.

وعندما تكون النقطة P بعيدة جداً عن مركز الحلقة (a>>R) فإنّ بالإمكان إهمال R في مقام المعادلة السابقة، عندئذٍ يصبح المجال المغناطيسي:

$$B \cong \frac{\mu_0 i R^2}{2a^3}$$

وحيثُ أنّ مساحة الحلقة (A) تساوي πR^2 فإنّ المعادلة السابقة تصبح:

$$B \cong \frac{\mu_0 i A}{2\pi x^3}$$

حيثُ نلاحظ أننا قد استبدلنا المتغير x بالمتغير a للحصول على هذه الصيغة العامة للمجال. وإذا كانت العروة مكونة من عدد N من اللفات، فإنّ المجال المغناطيسي عند النقطة P يساوي:

$$B \cong \frac{\mu_0 N i A}{2\pi x^3}$$

أو أنّ:

$$B \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3} \qquad (7\text{-}9)$$

حيث تمثل μ عزم ثنائي القطب المغناطيسي ويساوي $N i A$، انظر المعادلة (21-8).

وتجدر الإشارة هنا إلى أنّ المعادلة (7-9) للمجال المغناطيسي الناتج عن ثنائي قطب مغناطيسي μ عند نقطة على محوره تشبه تماماً المعادلة (9-2) للمجال الكهربائي الناتج عن ثنائي قطب p عند نقطة على محوره.

$$E \cong \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3} \qquad (9\text{-}2)$$

ويمكن الحصول على شدة المجال المغناطيسي في مركز الحلقة بالتعويض عن a في المعادلة (6-9) بالصفر، أي أنّ:

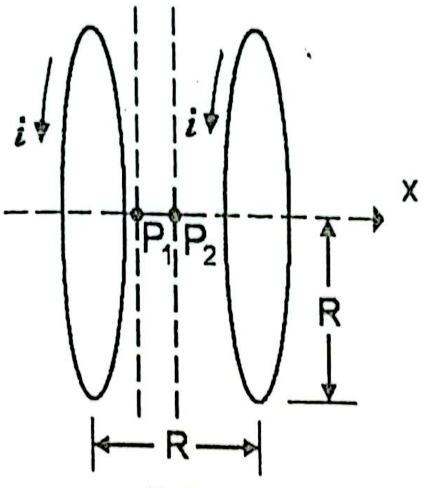
$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad ; \quad (a = 0 \text{ عندما})$$

شدة المجال المغناطيسي الناتج عن ثنائي قطب مغناطيسي (عروة تيار) عزمه μ في نقطة ما تبعد المسافة x عنه تتناسب طردياً مع μ وعكسياً مع x^3.

...مثال (9-4) : ملفا هلمهولتز (Helmholtz Coils)

...يتكون ملفا هلمهولتز من ملفين حلقيين متماثلين متوازيين ... على نفس المحور، ويساوي البعد بين مركزيهما نصف قطرهما. ويمر في الملفين تيار في ... الاتجاه، كما في الشكل (9-5). إذا علمت أنَّ التيار المار في الملفين 3 A ونصف قطر كل منهما 15 cm و... لفات كل منهما 1000 لفة، فاحسب ... المجال المغناطيسي: (أ) عند نقطة تقع على محور الملفين وتبعد مسافة 10cm عن مركز أحدهما. (ب) في منتصف المسافة بينهما.

الحل:



الشكل (9-5)

(أ) يُمثّل كل من الملفين عدداً N من عرى التيار. وبما أنَّ الملفين متوازيان ويقعان على نفس المحور، فإنَّ المجالين الناشئين عنهما يكونان في نفس الاتجاه، أي باتجاه محور x الموجب في الشكل (9-5). ويمكن إيجاد المجال المغناطيسي (B_1) الناشئ عن الملف الأول عند النقطة P_1 من المعادلة (9-6) بعد ضرب طرفها الأيمن في N، وذلك بتعويض $a = 10$ cm و $R = 15$ cm و $i = 3$ A فيها.

$$\therefore\quad B_1 = \frac{\mu_0 N i R^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{4\pi\times1000\times3\times(0.15)^2}{2\left((0.10)^2+(0.15)^2\right)^{3/2}} \neq 7.2\times10^{-3}\ \text{T}$$

وبالمثل يمكن إيجاد المجال المغناطيسي (B_2) الناشئ عن الملف الثاني عند النقطة P_1 مع مراعاة أنَّ $a = 5$ cm في هذه الحالة، أي أنَّ:

$$B_2 = \frac{\mu_0 N i R^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{4\pi\times1000\times3\times(0.15)^2}{2\left((0.05)^2+(0.15)^2\right)^{3/2}} = 10.7\times10^{-3}\ \text{T}$$

وبما أنَّ المجالين B_1 و B_2 يؤثران بنفس الاتجاه، فإنَّ محصلتهما B تساوي حاصل جمعهما، أي أنَّ:

$$B = B_1 + B_2 = 7.2\times10^{-3} + 10.7\times10^{-3} \approx 1.8\times10^{-2}\ \text{T}$$

(ب) يكون المجال الناشئ عن الملف الأول مساوياً للمجال الناشئ عن الملف الثاني عند نقطة تقع في منتصف المسافة بينهما، وذلك بسبب تماثل الملفين، إذ أنه يمر فيهما نفس التيار، وتبعد النقطة عن مركزيهما نفس البعد. أي أنَّ:

$$B = 2B_1 = 2B_2 = \frac{\mu_0 i N R^2}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$$

■ مثال (9-5)

سلكان طويلان مستقيمان ومتوازيان تفصلهما مسافة قدرها 10 cm. إذا مرَّ تيار شدته 20 A في كل منهما، فاحسب القوة المؤثرة على وحدة الطول لكل من السلكين عندما يكون التياران الماران في السلكين: (أ) باتجاهين متعاكسين (ب) بنفس الاتجاه.

الحل:

(أ) بتطبيق المعادلة (9-9)، نجد أنّ:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0\, i_2\, i_2}{2\pi d} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times20\times20}{2\pi\times0.1} = 8\times10^{-4}\ \text{N/m}$$

وهي قوة تنافر، لأنّ التيارين المارين في السلكين باتجاهين متعاكسين.

(ب) إذا انعكس اتجاه أحد التيارين المار في السلكين فهذا لا يؤثر على قيمة القوة المتبادلة بينهما، ولكن ينعكس اتجاهها. وبما أنّ القوة المؤثرة لكل وحدة طول بين هذين السلكين عندما يسري التياران فيهما باتجاهين متضادين يساوي 8×10^{-4} N/m، فإنّ قوة التجاذب بين السلكين في وحدة الطول عندما يكون التياران الماران فيهما بنفس الاتجاه تساوي 8×10^{-4} N/m أيضاً.

□ 4-9 قانون أمبير (Ampere's Law)

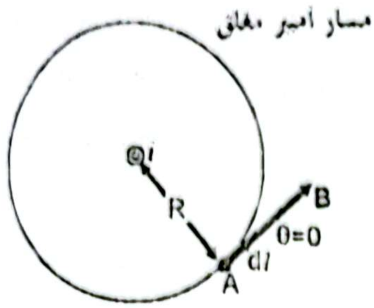
رأينا في الفصل الثالث كيف أنّ قانون غاوس يُسهّل حساب المجال الكهربائي لتوزيعات الشحنة ذات التماثل العالي ويعطي فهماً أعمق لماهية المجال الكهربائي. ويلعب قانون أمبير في المغناطيسية دوراً هاماً ومماثلاً لدور قانون غاوس في الكهرباء. حيثُ يستخدم قانون أمبير لحساب شدة المجال المغناطيسي الناشئ عن تيارات ذات تماثل عالٍ. إذ أنه يُسهّل عملية حساب المجال المغناطيسي، إضافة إلى قدرته على إعطاء تصور أوضح وفهم أكثر شمولاً من قانون بيوت وسافارت. ولهذا أهميته الكبيرة في معالجة الكثير من المسائل، وخاصة المعقدة منها. وينص قانون أمبير على أنّ التكامل الخطي (line integral) لشدة المجال المغناطيسي B حول أي مسار مغلق يساوي المجموع الجبري للتيارات المارة في المسار (i) مضروباً في ثابت إنفاذية الفراغ (μ_0) أي أنّ:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = = \mu_0\, i \qquad (10\text{-}9)$$

وتطبق هذه العلاقة على أي مسار مغلق يحيط بتيار كهربائي. ولتوضيح مضمون قانون أمبير نستخدمه في إيجاد المجال المغناطيسي الناتج عن سلك مستقيم طويل يحمل تياراً شدته i. وقد حُسب هذا المجال سابقاً في المثال (9-2) باستخدام قانون وسافارت. لنفترض أننا نريد إيجاد المجال المغناطيسي عند نقطة مثل A تبعد مسافة R عن محور السلك، كما في الشكل (9-7). إنّ أنسب مسار مغلق يمكن

أمبير هو محيط دائرة نصف قطرها يحتوي بعد منتصفه على السلك ومستواه عمودي عليه، كما في الشكل، حيث تشير العلامة ⊙ في الشكل إلى أنّ التيار عمودي على مستوى الورقة وخارج منها.

وفي هذه الحالة تكون شدة المجال المغناطيسي B ثابتة على هذا المسار، إذ أنّ جميع النقاط الواقعة عليه تبدو متماثلة بالنسبة للسلك الحامل للتيار، ويكون اتجاه المجال منطبقًا على اتجاه الإزاحة الجزئية dl على محيط المسار عند جميع النقاط



الشكل (9-7)

الواقعة عليه، أي أنّ الزاوية θ بين dl و B تساوي صفرا. وبتطبيق المعادلة (9-10) نجد أنّ:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \oint B\, dl = B \oint dl = \mu_0\, i$$

ولكن:

$$\oint dl = 2\pi R \quad (\text{محيط الدائرة})$$

لذلك فإنّ:

$$\oint B.dl = B\,(2\pi R) = \mu_0\, i$$

ومنها فإنّ:

$$B = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R}$$

وتماثل هذه النتيجة للمجال المغناطيسي القيمة التي حصلنا عليها (المعادلة 9-5) في المثال (9-2). وتلاحظ هنا عدم احتياجنا لإجراء تكاملات صعبة كما هو الحال في الطريقة الأولى. وحريٌ بنا أنْ نتذكر دائما بأنّ قانون أمبير يكون مفيداً في حساب المجال المغناطيسي للتيارات ذات التماثل العالي. فلو لم يكن مقدار B ثابتاً عند جميع النقاط على المسار المغلق الدائري، ولو لم يكن موازيا للمتجه dl لما تمكنّا من حساب تكامل المسار المغلق بسهولة. وعندما يحتوي المسار المغلق على عدة تيارات يؤخذ المجموع الجبري لها مع مراعاة اتجاهات هذه التيارات عند تطبيق قانون أمبير، حيثُ تطبق قاعدة اليد اليمنى لتحديد أي التيارات يكون موجبا (بالنسبة لاتجاه المجال B).

ينص قانون أمبير على أنّ التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار ما شدته i في مسار مغلق، يتناسب طرديا مع i. وإذا كان الوسط هو الفراغ فإنّ معامل التناسب الطردي هو ثابت إنفاذية الفراغ (μ_0).

يسمح قانون أمبير بحساب شدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار (أو توزيع من التيارات) عالي التماثل.

■ مثال (9-6)

سلك معدني مستقيم وطويل، أسطواني الشكل نصف قطره R ويحمل تيارا شدته i. أوجد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد r عن محور السلك في الحالات الآتية: (أ) r>R (خارج السلك). (ب) r<R داخل السلك. (ج) r = R (على سطح السلك).

الحل:

نستنتج من تماثل السلك الأسطواني أنّ قيمة المجال المغناطيسي تكون ثابتة عند جميع النقاط التي لها نفس البعد عن المحور. ويكون اتجاه المجال مماسا لمحيطات الدوائر التي مركزها محور السلك، كما في الشكل (9-8 أ).

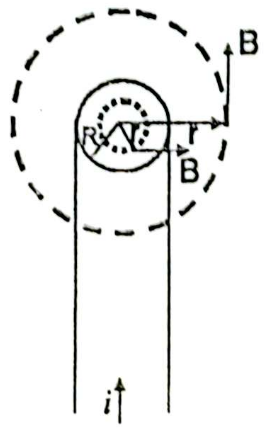
(أ) لإيجاد المجال المغناطيسي B عند نقطة تقع على بعد r>R من محور السلك، أي تقع خارجه، نختار مسارا دائريا مغلقا نصف قطره r ومركزه محور السلك، ثم نطبّق قانون أمبير، المعادلة (9-10) عليه، كالآتي:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathit{l} = B\oint d\mathit{l} = B(2\pi r) = \mu_0 i$$

ومنها نجد أنّ المجال B عند جميع النقاط الواقعة على المسار المختار بما فيها النقطة المطلوب حساب المجال عندها، هو:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad ; (r > R) \qquad (11\text{-}9)$$

حيثُ تُمثّل i هنا كل التيار المار في السلك. وهذه هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها للسلك الرفيع الطويل (مثال 9-2) باستخدام قانون بيوت وسافارت. ويكون اتجاه المجال وفقا لقاعدة اليد اليمنى على النحو المبين في الشكل (9-8 أ).



الشكل (9-8 أ)

(ب) لإيجاد شدة المجال المغناطيسي B عند نقطة داخل السلك (r<R)، نختار مسارا دائريا مغلقا نصف قطره r يمر في النقطة، كما فعلنا في الفرع السابق تماما. ثم نطبّق قانون أمبير على هذا المسار. ونلاحظ في هذه الحالة أنّ التيار i' المار داخل المسار المغلق أقل من التيار الكلي i، حيثُ يساوي التيار

i' حاصل ضرب كثافة التيار المار في السلك (J) في مساحة مستوى المسار أي أنّ:

$$i' = J\left(\pi r^2\right) = \frac{i}{\pi R^2}\left(\pi r^2\right) = i\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

وبتطبيق قانون أمبير، نجد انّ:

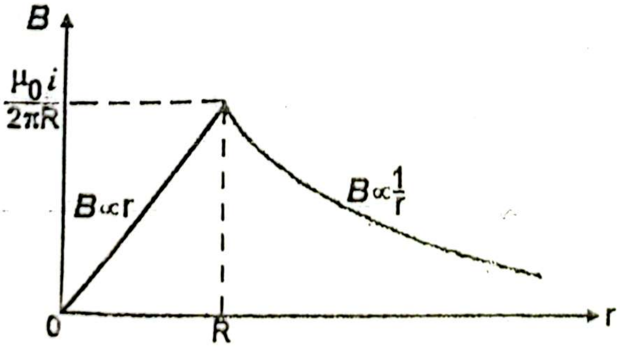
$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = B\oint dl = B\,(2\pi r) = \mu_0\, i' = \mu_0\, i\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$\therefore \quad B = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R^2} r \quad ; (r < R) \qquad (12\text{-}9)$$

(جـ) يُمكننا بالتعويض عن r بنصف القطر R في إحدى المعادلتين (9-11) و (9-12) إيجاد قيمة المجال المغناطيسي على سطح السلك، أي انّ:

$$B = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R} \quad ; (r = R) \qquad (13\text{-}9)$$

وتلاحظ من المعادلة (9-12) أنّ المجال المغناطيسي B على محور السلك ($r = 0$) يساوي صفراً. كما تلاحظ أنّ شدة المجال B تتناسب طرديا مع بعدها عن المحور (r) للنقاط الواقعة داخل السلك، بينما تتناسب شدة المجال B عند النقاط الواقعة خارج السلك عكسياً مع بعدها عن المحور (المعادلة 9-11). ويبين الشكل (9-8 ب) رسماً توضيحيا للعلاقة بين المجال B والبعد r عن محور السلك. ويتضح من هذا المثال سهولة التعامل مع قانون أمبير، فليس من السهل إيجاد المجال المغناطيسي داخل السلك الأسطواني في هذا المثال باستخدام قانون بيوت وسافارت.



الشكل (9-8 ب)

تتناسب شدة المجال المغناطيسي الناشئ عن سلك معدني مستقيم وطويل، أسطواني الشكل نصف قطره R ويحمل تياراً شدته i عند نقطة تبعد المسافة r عن محور السلك طردياً مع r داخل السلك (r<R) وعكسيًا مع r خارج السلك (r>R).

مثال (9-7)

موصل اسطواني أجوف وطويل، نصف قطره الداخلي a والخارجي b، يحمل تياراً شدته i وكثافته خلال مساحة مقطعه منتظمة، انظر الشكل (9-9). أوجد المجال المغناطيسي عند نقطة تبعد مسافة r عن محور الموصل للحالات الآتية: (أ) $r < a$، (ب) $a < r < b$، (جـ) $r > b$.

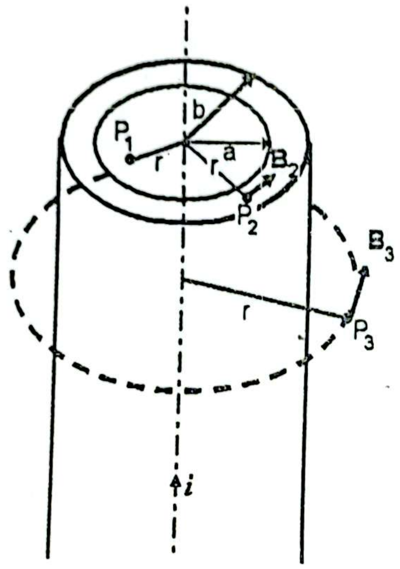
الحل:

(أ) من التماثل في الاسطوانة فإنّ شدة المجال المغناطيسي B عند جميع النقاط التي تبعد مسافة r عن محور الاسطوانة متساوية. نرسم مساراً مغلقاً مركزه محور الاسطوانة ويمر في النقطة المطلوب إيجاد المجال عندها داخل التجويف، النقطة P_1، ونُطبّق قانون أمبير عليه، فنجد أنّ:

$$\oint \mathbf{B}_1 . d\mathbf{l} = \mu_0 i' = 0$$

إذا أنّ المسار الواقع داخل التجويف الاسطواني (عندما $r < a$) لا يحتوي على أي تيار خلاله، وبالتالي، نستنتج أنّ:

$$B_1 = 0 \;;\; (r < a)$$



الشكل (9-9)

(ب) نجد شدة المجال المغناطيسي B_2 عند نقطة على بعد r $(a < r < b)$، بنفس الطريقة السابقة. حيثُ نختار مساراً مغلقاً يمر في النقطة المطلوب إيجاد المجال عندها (النقطة P_2 مثلاً) ثم نُطبّق قانون أمبير على النحو التالي:

$$\oint \mathbf{B}_2\, d\mathbf{l} = B_2\,(2\pi r) = \mu_0\, i''$$

حيثُ يمثّل i'' التيار المار داخل المسار المغلق الذي يمر في النقطة P_2. ويتضح من الشكل أنّ قيمة هذا التيار تساوي:

$$i'' = \frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}\, i$$

وبالتعويض عن i''، نجد أنّ:

$$B_2 = \frac{\mu_0\, i\,(r^2 - a^2)}{2\pi r\,(b^2 - a^2)} \;;\; (a < r < b)$$

(جـ) أما شدة المجال المغناطيسي عند نقطة تقع خارج الأسطوانة $(r>b)$، P_3 مثلاً، فيمكن إيجادها

باختيار مسار مغلق نصف قطره r (أكبر من b)، يمر في النقطة المطلوب إيجاد المجال عندها، ثم نطبّق قانون أمبير على المسار على النحو التالي:

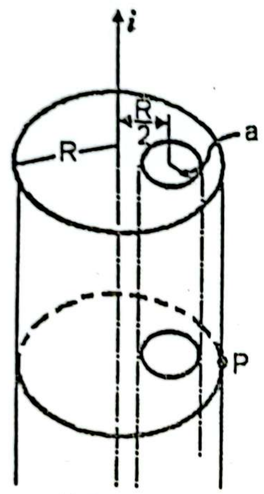
$$\oint B_3\, dl = B_3\,(2\pi r) = \mu_0\, i$$

حيثُ تُمثّل i هنا التيار الكلي الذي يمر في الموصل، إذ إنه هو التيار المار في المسار المغلق (الذي يمر في النقطة P_3). ومن المعادلة السابقة، نجد أنّ:

$$B_3 = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r} \ ; \ (r > b)$$

مثال (9-8)

اسطوانة معدنية طويلة، نصف قطرها R، تحتوي على تجويف اسطواني على امتدادها نصف قطره a ويبعد محوره عن محور الاسطوانة المعدنية R/2، كما في الشكل (9-10). إذا مر تيار i في الاسطوانة، فاحسب المجال المغناطيسي عند نقطة واقعة عند التقاء امتداد الخط الواصل بين محوري الاسطوانة والتجويف مع السطح، مثل النقطة P في الشكل.



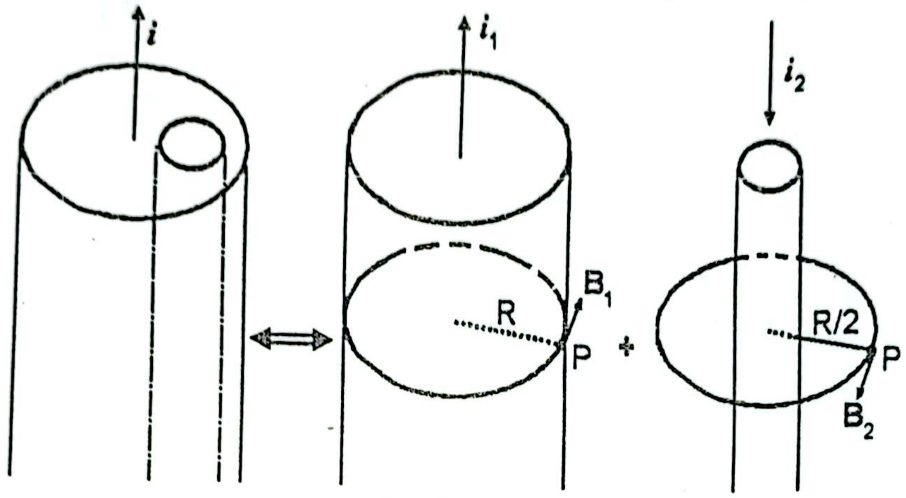
الشكل (9-10)

الحل:

يتضح من الشكل أنّ حل المسألة باستخدام قانون بيوت وسافارت أمر في منتهى الصعوبة، حيثُ يلزم إجراء عملية المكاملة حول جميع أجزاء الاسطوانة الحاملة للتيار. ولكن يمكن حل المسألة باستخدام قانون أمبير والاستعانة بمبدأ التراكب (superposition principle). حيثُ يكون تأثير التجويف على المجال المغناطيسي للأسطوانة مماثلاً لتأثير اسطوانة معدنية بنفس أبعاد التجويف الهندسية وتحمل تياراً معاكساً لتيار الاسطوانة الأصلي، موجودة مكان التجويف الاسطواني. أي أنّ شدة المجال المغناطيسي عند النقطة P الناتج عن الاسطوانة المحتوية على التجويف يساوي محصلة المجال المغناطيسي الناشئ عن اسطوانة معدنية مصمتة (لا تحتوي على تجويف) والمجال المغناطيسي الناشئ عن الاسطوانة المعدنية المكافئة للتجويف الاسطواني.

ويمكن تبسيط فكرة التكافؤ الكهربائي هذه بالتمعن في الشكل (9-11)، حيثُ تساوي كثافة التيار

المعاكس J المار في الاسطوانة الصغيرة، المكافئة للتجويف، كثافة التيار الأصلي J المار في الاسطوانة المحتوية على التجويف. وهكذا فإنّ دمج الاسطوانة الصغيرة مع الاسطوانة الكبيرة في المكان المناسب سيؤدي إلى حدوث منطقة خالية من الشحنات الحرة، بسبب تساوي كثافتي التيار، وهذا مكافئ تماماً للتجويف الأسطواني.



الشكل (9-11)

وتلاحظ من الشكل (9-11) أنّ المجال المغناطيسي الكلي B يساوي:

$$B = B_1 + B_2$$

حيثُ تُمثّل B_1 المجال المغناطيسي عند النقطة P الناشئ عن الاسطوانة المصمتة ويؤثر باتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة عند النقطة. وتُمثّل B_2 المجال المغناطيسي الناتج عن الاسطوانة المكافئة للتجويف، حيثُ يؤثر هذا المجال باتجاه عقارب الساعة عند النقطة P، لأنّ التيار المار فيها متجه إلى الأسفل.

وتُمثّل عملية جمع المجالين B_1 و B_2 مبدأ التراكب والذي هو هنا ببساطة عبارة عن جمع متجهات. ويتضح من الشكل أنّ اتجاهي B_1 و B_2 متعاكسان، إذ أنهما مماسان متعاكسان. وبتطبيق قانون أمبير على المسارين المغلقين المارين في النقطة P الموضحين في الشكل (9-11) يمكننا إيجاد قيمة B_1 و B_2، كل على حدة، على النحو التالي:

$$\oint B_1 . dl = B_1 \oint dl = B_1 \left(2\pi R \right) = \mu_0 \; i_1$$

حيثُ يُمثّل i_1 التيار المار خلال الاسطوانة الافتراضية التي نصف قطرها R، أي أنّ:

$$i_1 = J\left(\pi R^2\right) = \frac{i}{\pi\left(R^2 - a^2\right)} \pi R^2 = i \frac{R^2}{R^2 - a^2}$$

وبالتعويض عن i_1 في معادلة المجال B_1 أعلاه، نجد أنّ:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R}{(R^2 - a^2)}$$

وكذلك، فإنّ:

$$\oint \mathbf{B}_2 . d\mathbf{l} = B_2 \oint dl = B_2 \left(2\pi \frac{R}{2} \right) = \mu_0 \, i_2$$

حيثُ يُمثّل i_2 التيار المار خلال الاسطوانة الافتراضية التي نصف قطرها a والمكافئة للتجويف.

وبنفس الطريقة التي تم بها إيجاد i_1 نجد i_2. أي أنّ:

$$i_2 = i \frac{a^2}{R^2 - a^2}$$

وبالتعويض عن i_2 في معادلة المجال B_2 أعلاه، نجد أنّ:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{\pi R} \frac{a^2}{(R^2 - a^2)}$$

وهكذا فإنّ المجال المغناطيسي المُحصّل عند النقطة P يكون:

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 i R^2}{2\pi R (R^2 - a^2)} - \frac{\mu_0 a^2 i}{\pi R (R^2 - a^2)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left(\frac{R^2 - 2a^2}{R^2 - a^2} \right)$$

أو:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \left(\frac{1 - 2a^2/R^2}{1 - a^2/R^2} \right)$$

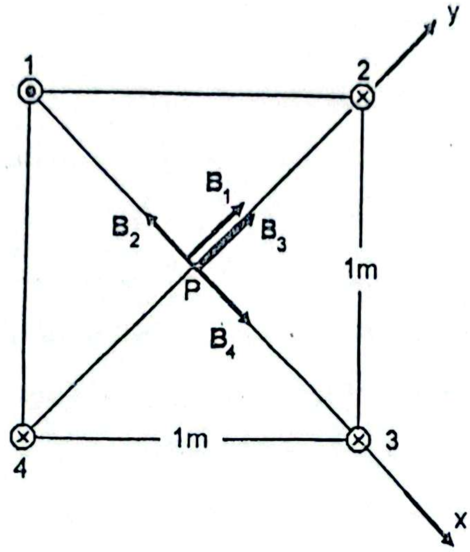
تدل الإشارة السالبة على تعاكس اتجاهي المجالين B_1 و B_2 وأنّ المجال المحصّل B في اتجاه B_1.

مثال (9-9)

يبين الشكل (9-12) مقطعا عرضيا لأربعة أسلاك طويلة ومتوازية وعمودية على مستوى الورقة تخترق رؤوس مربع طول ضلعه a = 1 m. إذا مر تيار شدته 2A في كل من الأسلاك الأربعة في الاتجاهات المبينة في الشكل، فاحسب المجال المغناطيسي عند النقطة P الواقعة في مركز المربع.

الحل:

يؤثر عند النقطة P أربعة مجالات مغناطيسية نتيجة مرور التيار في الأسلاك الأربعة. وباستخدام قاعدة اليد اليمنى يمكننا تحديد اتجاه كل من هذه المجالات عند النقطة P، كما هو مبين في الشكل (9-12). بما أنّ التيارات المارة في الأسلاك الأربعة متساوية، وأبعاد النقطة P عن هذه الأسلاك متساوية أيضا، فإنّ:



الشكل (12-9)

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \frac{a}{2}\sqrt{2}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{\pi \times 1\sqrt{2}} = 5.66 \times 10^{-7}\ T$$

ولإيجاد المجال المغناطيسي المحصل نختار محورين متعامدين x و y، على النحو المبين في الشكل، ثم نمثل المجالات الأربعة عند النقطة P بالمعادلات التالية:

$$B_1 = +5.66 \times 10^{-7}\ \hat{j}$$

$$B_2 = -5.66 \times 10^{-7}\ \hat{i}$$

$$B_3 = +5.66 \times 10^{-7}\ \hat{j}$$

$$B_4 = +5.66 \times 10^{-7}\ \hat{i}$$

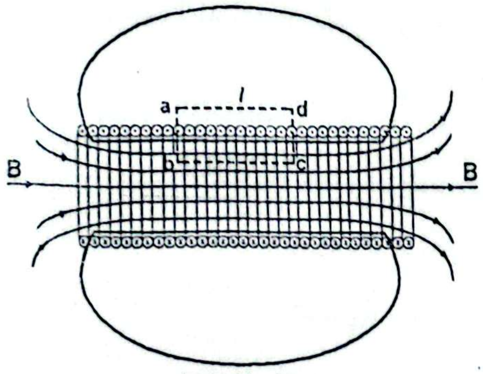
وبجمع المجالات الأربعة نجد أنَّ المجال المغناطيسي المحصل عند النقطة P ناتج عن مجموع المجالين B_1 و B_3 فقط لأنَّ المجالين B_2 و B_4 يلغيان بعضهما بعضاً. وهكذا فإنَّ المجال المغناطيسي المحصل يكون:

$$B = 11.32 \times 10^{-7}\ \hat{j}\ \ (T)$$

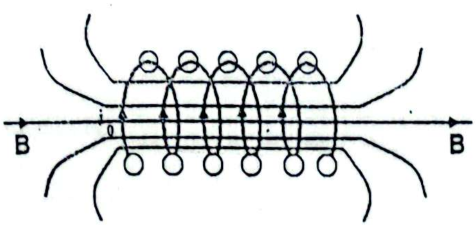
اي أنَّ قيمة المجال المغناطيسي المحصل عند النقطة P تساوي 11.32×10^{-7} T، ويؤثر باتجاه محور y الموجب.

□ 5-9 الملف اللولبي (The Solenoid)

يتكون الملف اللولبي من سلك ملفوف على أسطوانة بلفات متراصة. وعند مرور تيار في الملف يتولد داخله مجال مغناطيسي منتظم تقريبا، ويعمل الملف عندها عمل قضيب مغناطيسي. وتكون شدة المجال المغناطيسي داخل الملف كبيرة، إذ إنها تُمثّل المجالات الناتجة عن التيارات المارة في كل لفة (أو عروة) من لفات الملف. ويبين الشكل (9-13) مجال الملف اللولبي عند مرور تيار ثابت i_0 خلاله، وعند فصل اللفات وإبعادها عن بعضها بعضاً. حيثُ تلاحظ أنّ خطوط المجال المغناطيسي قرب سطح سلك أي من اللفات يكون على شكل دوائر، مركزها السلك، تماماً كما هي الحال مع خطوط المجال لسلك مستقيم حامل لتيار. وتلغي المجالات المغناطيسية بعضها بعضا بين أية لفتين متجاورتين، في حين أنّها تجمع بعضها إلى بعض داخل الملف اللولبي لتعطي مجالاً منتظما تقريبا. وإذا قربت هذه اللفات بعضها إلى بعض وأصبحت متلاصقة، يصبح المجال المغناطيسي منتظما داخل الملف وموازيا لمحوره، كما هو مبين في الشكل (9-14). ويصّبح المجال خارج الملف ضعيفاً للغاية، إذا ما قورن بالمجال داخله، ولا ينطبق هذا تماماً على المجال عند طرفي الملف، إذ أنّ خطوط المجال تبدأ هناك بالابتعاد بعضها عن بعض والانتشار في المنطقة الواقعة خارج الملف، فتقل شدة المجال المغناطيسي الناتج عنها بالتالي عند الطرفين.



الشكل (9-14)



الشكل (9-13)

لحساب المجال المغناطيسي داخل ملف لولبي طويل يحمل تياراً ثابتاً i_0 نُطبّق قانون أمبير على مسار مغلق مناسب، كالمسار abcda في الشكل (9-14). حيثُ يمكن النظر إلى هذا المسار على أنه مكون من أربعة أجزاء هي: ab و bc و cd و da. ومن ثم يكتب الطرف الأيسر لقانون أمبير على النحو التالي:

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B}.d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B}.d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B}.d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B}.d\mathbf{l}$$

وبما أنّ المجال المغناطيسي خارج الملف اللولبي صغير جداً، فإنّه يمكن إهماله إذا ما قورن بالمجال داخل الملف. وبالتالي يصبح التكامل للمسار da يساوي صفراً. من ناحية أخرى يكون المجال B داخل

الملف عموديا على المسارين ab و cd، ويساوي المجال صفرا تقريبا في المنطقة بين لفات الملف وخارجها. لذلك فإنّ التكاملين حول المسارين ab و cd يساويان صفرا، ونستطيع إهمالهما. وعليه فإنّ تكامل المجال المغناطيسي حول المسار المغلق abcda يُعطى بالمعادلة:

$$\oint \mathbf{B}.d\boldsymbol{l} = \int_b^c \mathbf{B}.d\boldsymbol{l} = B\int_b^c dl = Bl \qquad (14\text{-}9)$$

حيثُ تُمثّل B هنا المجال المغناطيسي داخل الملف اللولبي وتُمثّل l طول الجزء bc من المسار المغلق. أخيرا نحسب التيّار المار في المسار المغلق ثُمّ نعوض عنه في قانون أمبير. فإذا افترضنا أنّ المسار المغلق يحتوي على N لفة، فإنّ التيار الكلي داخل هذا المساريكون $N\,i_0$، ومن ثم نستنتج أنّ:

$$\oint \mathbf{B}.d\boldsymbol{l} = Bl = \mu_0 N\, i_0$$

وإذا رمزنا لعدد اللفات الموجودة في وحدة الطول من الملف بالرمز n، أي إذا وضعنا $n = N/l$، تصبح قيمة المجال المغناطيسي:

$$B = \mu_0\, n\, i_0 \qquad (15\text{-}9)$$

وتلاحظ من هذه النتيجة أنّ المجال المغناطيسي B داخل الملف اللولبي يعتمد فقط على عدد اللفات لكل وحدة طول وعلى التيار المار في الملف. ولا يعتمد على المكان، وبالتالي فإنّه يكون منتظما هناك (بعيداً عن طرفيه بالطبع).

يتكون الملف اللولبي من سلك ملفوف على أسطوانة بلفات متراصة.

تكون شدة المجال المغناطيسي B داخل الملف اللولبي (باستثناء طرفيه) منتظمة إذ تعتمد قيمتها فقط على عدد اللفات لكل وحدة طول وعلى التيار المار في الملف. ولا تعتمد قيمة B على المكان.

مثال (9-10)

احسب شدة المجال المغناطيسي داخل ملف لولبي طوله 50 cm ويحوي على 1000 لفة عندما يمر به تيار شدته 3 A.

الحل:

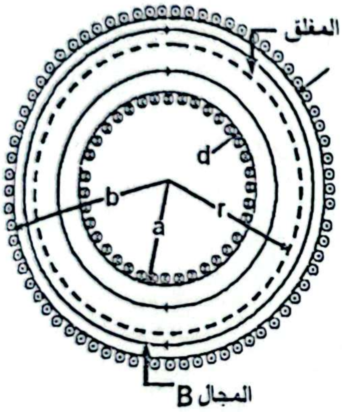
نجد شدة المجال المغناطيسي داخل الملف اللولبي بتطبيق المعادلة (9-15):

$$B = \mu_0\, n i_0 = 4\pi 10^{-7} \times \frac{1000}{0.50} \times 3 = 7.54\times 10^{-3}\ \text{T} = 75.4\text{G}$$

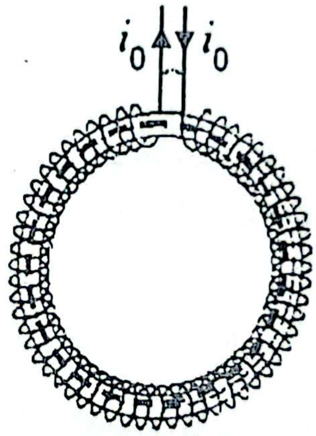
6-9 الملف الإطاري (The Toroid)

الملف الإطاري ملف لولبي مثني على شكل إطار، بحيثُ لم تعد له أطراف، كما في الشكل (9-15). ويبين الشكل (9-16) مقطعاً عرضياً لملف إطاري عدد لفاته N ويحمل تياراً شدته i_0. ويتضح من التماثل أنّ خطوط المجال المغناطيسي الناشئة عن مرور التيار في الملف ستكون بشكل دوائر متحدة المركز داخل الملف. ولو اعتبرنا إحدى هذه الدوائر التي نصف قطرها r كمسار مغلق، وطبقنا قانون أمبير عليها، نجد أنّ:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B(2\pi r) = \mu_0 N i_0$$



الشكل (9-16)



الشكل (9-15)

حيثُ أنّ المجال عند جميع النقاط على المسار المغلق المنقط في الشكل (9-16) ثابت وأنّ التيار الكلي داخله $N i_0$. وهكذا، فإنّ شدة المجال المغناطيسي داخل الملف الإطاري

$$B = \frac{\mu_0 N i_0}{2\pi r} \quad ; (a < r < b) \qquad (9\text{-}16)$$

لاحظ أنّ قيمة المجال المغناطيسي B داخل الملف الإطاري ليست منتظمة ولكنها تتغير عكسياً مع تغير r وهذا مغاير لمجال الملف اللولبي الذي سبق أنّ وجدناه لا يعتمد على المكان داخله، أما إذا كان قطر كل عروة (المسافة d في الشكل 9-16) صغيراً بالنسبة للبعد r فإنّه يمكن اعتبار B ثابتة داخل الملف الإطاري. وأما المجال B فيساوي صفراً عندما تكون $r<a$ أو $r>b$، ونترك لك برهان ذلك.

الملف الإطاري هو ملف لولبي مثني على شكل إطار بحيثُ لم تعد له أطراف.

تعتمد شدة المجال المغناطيسي B داخل الملف الإطاري على المكان. وبالتالي فهي ليست منتظمة داخله.

شدة المجال المغناطيسي B خارج الملف الإطاري تساوي صفراً.

■ مثال (9-11)

ثني ملف لولبي عدد لفاته 3000 على شكل إطار فأصبح نصف قطره الداخلي 50 cm والخارجي 60 cm. ما مقدار التيار الكهربائي اللازم تمريره في الملف للحصول على مجال مغناطيسي في مركز العرى شدته 0.03 T؟

الحل:

لإيجاد التيار اللازم تمريره في الملف نستخدم المعادلة (9-16) التالية:

$$B = \frac{\mu_0 N i_0}{2\pi r}$$

$$0.03 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times i_0}{2\pi \times \left(\frac{0.50+0.60}{2}\right)}$$

ومنها فإنّ: $i_0 = 27.5\ \text{A}$

لاحظ أننا عوضنا عن r بمتوسط نصف قطر الملف الإطاري ($r = 0.55$ m)، وهذا يُمثل بعد مركز العرى عن مركز الملف الإطاري.

9-7 الخواص المغناطيسية للمواد

رأينا في الفصل الخامس أنّ وضع مادة عازلة في مجال كهربائي E يعمل على إضعاف المجال ليصبح E/κ، حيثُ κ معامل العزلة للمادة، وبالمثل فإنّ وضع مادة في مجال مغناطيسي B يعمل على تغيير المجال ليصبح $\kappa_M B$، حيثُ تُمثل κ_M، الانفاذية المغناطيسية النسبية (Relative Permeability) للمادة، ويقصد بالانفاذية النسبية للمادة النسبة بين ثابت إنفاذيتها μ وثابت إنفاذية الفراغ μ_0 للتأثير المغناطيسي،أي أنّ:

$$\kappa_M = \frac{\mu}{\mu_0}$$

وتصنف المواد المغناطيسية تبعاً لمقدار معامل الإنفاذية النسبية κ_M. فيُطلق على المواد التي تكون قيمة κ_M لها أقل من 1 اسم المواد الديامغناطيسية، كما يُطلق على المواد التي تكون قيمة κ_M لها أكثر من 1 بقليل اسم المواد البارامغناطيسية، ويُطلق على المواد التي تكون قيمة κ_M لها أكثر بكثير من 1 اسم المواد الفرومغناطيسية. وتعتمد قيمة المعامل κ_M على المجال المغناطيسي المؤثر وعلى الطريقة التي تعامل بها المادة. وفيما يلي نناقش باختصار سبب تأثر بعض المواد بالمجال المغناطيسي بمقدار كبير في حين يتأثر بعضها الآخر تأثرا قليلاً بالمجال.

المواد الديامغناطيسية (Diamagnetic Materials):

إنّ ظاهرة تمغنط المواد نتيجة وضعها تحت تأثير مجال مغناطيسي خارجي يعود إلى سببين، الأوّل هو تراصف الذرات والجزيئات التي تمتلك عزوماً مغناطيسية دائمة، والثاني هو التغير الذي يحدث في حركة الإلكترونات في ذرات المادة. وكما تعلم فإنّ المجال المغناطيسي يؤثر بقوة مغناطيسية على الشحنات المتحركة فيه، فمن الطبيعي إذن أن تتعرض الإلكترونات التابعة لذرات المادة أو جزيئاتها إلى هذه القوة الإضافية الناجمة عن المجال المغناطيسي الخارجي المستخدم. وينتج عن هذه القوة الإضافية تغيير في حركة الإلكترونات في الذرة مما يؤدي إلى تكوين ما يكافئ تياراً إضافياً محتثاً فيها ينشأ عنه عزم مغناطيسي محتث (induced magnetic dipole) للذرة، ويكون بعكس اتجاه المجال المغناطيسي المستخدم، وعليه فإنّ المادة ككل سوف تتمغنط باتجاه مضاد للمجال المغناطيسي الخارجي فتضعفه. ولهذا السبب تدعى هذه المواد بالديامغناطيسية (Diamagnetic) و Dia تعني ضد. فعند تقريب مثل هذه المواد، كالبزموث مثلاً، من مغناطيس قوى نلاحظ نفورها عنه. ويمكن القول أنّ ظاهرة الديامغناطيسية موجودة في جميع المواد بدون استثناء، لكنها قد لا تظهر في معظمها وذلك لوجود تأثير آخر مضاد أقوى منها فيحجبها ويمنع ظهورها. وتمتاز هذه المواد كما أسلفنا بمعامل إنفاذية نسبي κ_M أقل من 1 بقليل.

المواد البارامغناطيسية (Paramagnetic Materials):

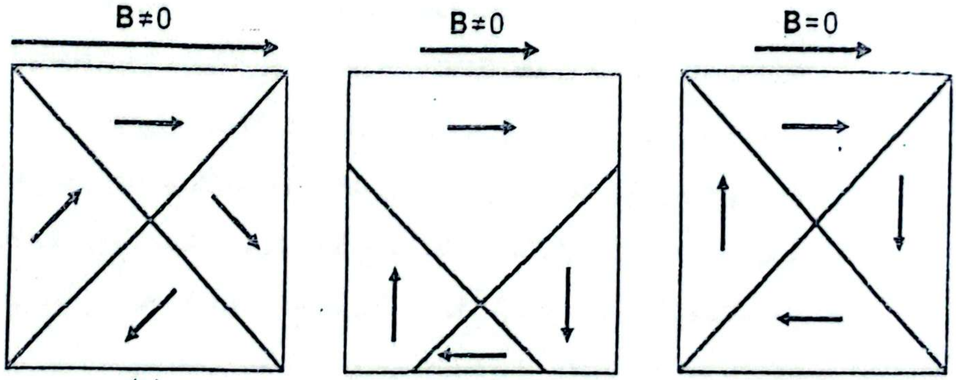
هناك العديد من الذرات التي تمتلك خصائص مغناطيسية، وذلك لأنّ العزوم المغناطيسية لإلكتروناتها سواء التي تنشأ عن الحركة الدورانية أو الحركة المغزلية (spin) تتعادل فيما بينها ويمحو أحدها تأثير الآخر، فتكوّن محصلة العزم المغناطيسي للذرة كما هو الحال في عنصر النيون (Ne). ولكن هناك ذرات أخرى لا يحدث فيها هذا التعادل التام في العزوم المغناطيسية لجميع إلكتروناتها، تلك الذرات هي التي تمتلك عزماً مغناطيسياً دائماً (μ). ونعتبرها ثنائيات أقطاب مغناطيسية كنظيراتها الجزيئات القطبية (polar molecules) التي تعتبر ثنائيات أقطاب كهربائية. فإذا سلط مجال مغناطيسي على عينة من مثل هذه الذرات فإنّه ينشأ عزم يُدوّر ثنائيات الأقطاب المغناطيسية الممثلة لها ويؤدي إلى تراصها باتجاه موازٍ للمجال المسلط عليها فينتج عن ذلك تمغنط إضافي، لكنه ضعيف، ويعمل على تقوية المجال المغناطيسي الخارجي، لهذا فإنّ معامل الإنفاذية النسبي κ_M لهذه المواد يكون أكبر من 1 بقليل. وتدعى المواد التي تتصرف بهذه الطريقة بالمواد البارامغناطيسية (Paramagnetic materials) و Para تعني موازي. ومن الأمثلة عليها الألمنيوم والزنك.

المواد الفرومغناطيسية (Ferromagnetic Materials):

تظهر الخواص المغناطيسية في المواد الفرومغناطيسية بشكل واضح، حتى بالتأثير عليها بمجال مغناطيسي خارجي ضعيف، ويطلق على هذه المواد أيضاً اسم الحديدومغناطيسية

(Ferromagnetic) و Ferro تعني حديدي، نسبة إلى الحديد الذي يُعدُّ من أشهر هذه المواد.

وتتميز هذه المواد في قابليتها للتمغنط العالي والدائم. ويعتمد مقدار التمغنط في هذه المواد على شدة المجال المغناطيسي الممغنِط. ويُعزى سبب التمغنط العالي الذي تكتسبه هذه المواد بصورة رئيسية إلى وجود نوع من التأثير المتبادل بين ذرات كل مجموعة من الذرات المتجاورة للمادة يؤدي إلى بقائها متراصة باتجاه واحد. أما طبيعة هذا التأثير الذي ينتج عن قوى كبيرة تعمل على إبقاء العزوم المغناطيسية لذرات المجموعة الواحدة متوازية، فهو موضوع في غاية التعقيد ولا يمكن شرحه إلا على ضوء الميكانيكا الكمية (quantum mechanics). إنَّ كل مجموعة من الذرات التي تكون عزومها في اتجاه واحد تدعى حقلاً (domain). وتكون الحقول (المناطق) المختلفة لمادة غير ممغنطة موزعة بصورة عشوائية داخل المادة باتجاهات مختلفة. لذا تكون محصلة التمغنط فيها صفراً (انظر الشكل 17-9 أ). ولكن إذا تعرضت هذه المادة لمجال مغناطيسي خارجي B فإنها تكتسب تمغنطاً ينشأ عن عاملين، الأول هو حدوث نمو في الحقول الأكثر استقامة مع المجال الخارجي الممغنِط على حساب الحقول الأخرى (انظر الشكل 17-9 ب). أما العامل الثاني فهو دوران الحقول التي ليست باتجاه المجال الخارجي المُسلَّط بحيثُ تصبح أكثر استقامة مع المجال (انظر الشكل 17-9 ج). وكلما ازداد المجال الخارجي المُسلَّط زادت استقامة الحقول باتجاهه حتى تصبح جميع الحقول بنفس اتجاه المجال المستخدم.



(ج) (ب) (أ)

الشكل (17-9)

وعندئذٍ تصبح المادة في حالة إشباع مغناطيسي. وإذا عاد المجال الخارجي إلى الصفر فإنَّ بعض الحقول تحتفظ باتجاهها الموازي لاتجاه المجال الأصلي ممَّا يؤدي إلى احتفاظ المادة بالخواص المغناطيسية بصورة دائمة.

إنَّ تمغنط المادة الفرومغناطيسية يعتمد على درجة حرارتها. فلكل مادة درجة حرارة معينة تدعى درجة حرارة كوري (Curie temperature)، تفقد عندها المادة خواصها المغناطيسية نتيجة لتهيج الذرات وعودتها لترتيب نفسها بشكل عشوائي وتتحول إلى مادة بارامغناطيسية. ومن الأمثلة على المواد الفرومغناطيسية الحديد (Fe) والكوبالت (Co) والنيكل (Ni).

André Marie Ampère

أندريه ماري أمبير

وُلد أمبير عام 1775 في مدينة ليون الفرنسية، لعائلة ميسورة الحال، واهتم والده بتدريسه وبعث الفضول العلمي في نفسه لدرجة أنّ الشاب الصغير قرأ الموسوعة الفرنسية كاملة وبالترتيب الأبجدي. وبدأ اهتمامه بالرياضيات مبكرا وارسل بمقال علمي لأكاديمية العلوم في ليون وهو في سن الثالثة عشرة.

في السنة التالية، 1789، وهي سنة الثورة الفرنسية كان أبوه أحد ضحاياها وأعدم بالمقصلة. ومع أنّ أمبير لم يكن حاصلاً على أيّة شهادة مدرسية أو جامعيّة إلاّ أنّ مواهبه وعلمه سمحا له بأن يدرّس الرياضيات في الفترة بين عامي 1797 و 1802، حتّى عُيّن أستاذا للفيزياء والكيمياء في إحدى مدارس الهندسة الكبرى في ضواحي باريس. وانتقل أمبير للإقامة نهائيا في باريس بعد وفاة زوجته الأولى وأصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك المعروفة. كان كوشي (Cauchy)، وهو أحد أبرز ممثّلي المدرسة الفرنسية في الرياضيات في القرن التاسع عشر، زميلاً لأمبير وكان الطلاب يُفضلون أمبير لسهولة شرحه مقارنة بتعقيد فرضيات زميله كوشي. وفاز أمبير بمقعد في المعهد الوطني للعلوم الذي أصبح أكاديمية العلوم الفرنسية بعد أنْ تغلب على منافسه للمقعد كوشي. تعددت اهتمامات أمبير العلمية في تلك الفترة من الرياضيات إلى الكيمياء (يعود الفضل إلى أمبير في التنبؤ بوجود عنصر الفلور والى عمل تصنيف للعناصر عام 1816) والى الضوء في الفيزياء. وفي بداية العشرينيات من القرن التاسع عشر اهتم أمبير بالكهرباء والمغناطيسية بعد أن سمع باكتشاف أورستد في هولندا. وبعد عام من اكتشاف أورستد، وضع أمبير قانونه المشهور. وفي عام 1826 نشر كتابه "*اطروحات في النظرية الرياضية للظّواهر الكهروديناميكية المبنية فقط على التجربة*". الذي ضمنّه كل نظرياته وآرائه في الكهرباء والمغناطيسية وسط منافسة حادة مع فيزيائيين فرنسيين مثل بيوت وبواسون. وفي نفس العام بدأ أمبير بإعطاء دروس في الكهروديناميكا في الكوليج دو فرانس (Collège de France)، وهي أشهر مؤسسات فرنسا العلمية حتّى الآن. وتوفي أمبير عام 1836، بعد حياة علميّة مليئة بالإنجازات وحياة اجتماعية بائسة، في مدينة مرسيليا، أكبر موانئ فرنسا على البحر الأبيض المتوسط.

بتصرف عن

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Ampere.html

ملخص الفصل التاسع

1. قانون بيوت- سافارت هو قانون استقي من التجربة ويُعطي شدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي في نقطة ما.

2. يُعطى المجال المغناطيسي الناتج عن عنصر تيار $(i\,dl)$ في نقطة تبعد المسافة r عنه والمعرفة بالمتجه **r** حسب قانون بيوت- سافارت بالمعادلة التالية:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

حيثُ $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ هو متجه الوحدة في اتجاه **r**.

3. المجال المغناطيسي الناتج عن سلك لانهائي الطول ويحمل تياراً شدته i في نقطة تبعد المسافة R عنه يساوي: $B = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R}$

4. شدة المجال المغناطيسي الناتج عن ثناقطبي مغناطيسي (عروة تيار) عزمه μ في نقطة ما تبعد مسافة x عنه تتناسب طردياً مع μ وعكسياً مع x^3، اي أنّ: $B \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{\mu}{x^3}$

5. ينص قانون امبير على أنّ التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي الناتج عن تيار كهربائي ما شدته i في مسار مغلق، يتناسب طردياً مع i. وإذا كان الوسط هو الفراغ فإنّ معامل التناسب الطردي هو ثابت إنفاذية الفراغ (μ_0)، أي أنّ: $\oint \mathbf{B}.\,d\mathbf{l} = \mu_0\, i$

6. الملف اللولبي عبارة عن سلك ملفوف على أسطوانة بلفات متراصة. وعند مرور تيار في الملف يتولد داخله مجال مغناطيسي منتظم تقريباً. وتُعطى شدة المجال المغناطيسي داخل الملف إذا كانت شدة التيار المار في الملف هي i_0 بالعلاقة:

$$B = \mu_0\, n\, i_0$$

حيثُ تُمثّل n عدد اللفات في وحدة الطول.

7. الملف الإطاري ملف لولبي مثني على شكل إطار، بحيثُ لم تعد له أطراف. فإذا كان نصف قطر الملف الداخلي a ونصف قطره الخارجي b وعدد لفاته هو N وإذا كانت شدة التيار المار فيه هي i_0 فإنّ شدة المجال المغناطيسي داخله وعلى بُعد r من مركزه تساوي:

$$B(r) = \frac{\mu_0\, N i_0}{2\pi r}\ ;\ (a < r < b) \qquad B(r) = 0\ ;\ (r < a\ \text{و}\ r > b)$$

تمارين

1: يمر تيار شدته 10 A بانتظام في سلك موصل طوله 10 cm. إنّ قيمة شدة المجال المغناطيسي الناتج عن التيار في نقطة تبعد مسافة 3 cm عن السلك تُساوي:

أ) 33.3 μT ب) 66.5 μT ج) 133.0 μT د) 199.5 μT

2: يمر تيار شدته 1 A بانتظام في سلك موصل على شكل ربع حلقة نصف قطرها 15 cm. إنّ قيمة شدة المجال المغناطيسي الناتج عن التيار في مركز الحلقة تُساوي:

أ) 13.2 μT ب) 6.6 μT ج) 3.3 μT د) 1.2 μT

3: يسلك أسطواني من النحاس نصف قطر مقطعه 4 cm ويحمل تيارا شدته 4 A، إنّ شدة المجال المغناطيسي عند نقطة P تقع داخل السلك وعلى بعد 2 cm عن المحور تساوي:

أ) 25 μT ب) 20 μT ج) 15 μT د) 10 μT

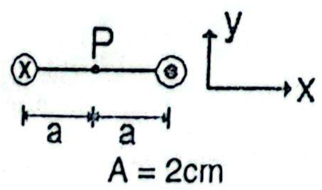
4: سلكان معدنيّان طويلان ومتوازيان البعد بينهما 1 m يحملان تيارين شدة كل منهما 5 A باتجاهين متعاكسيْن. إنّ شدة المجال المغناطيسي عند نقطة واقعة في منتصف المسافة بينهما تُساوي:

أ) صفرا ب) 0.4 μT ج) 2.0 μT د) 4.0 μT

5: في السؤال السابق إنّ القوة التي يؤثر بها أحد السلكين على الآخر (بوحدة (10^{-6} N)) تُساوي:

أ) 5 ب) 4 ج) 3 د) 2

6: سلكان طويلان مستقيمان ومتوازيان والمسافة بينهما تُساوي 4 cm ، يمرُّ في السلكين تياران متساويان متعاكسان في الاتجاه (الأول داخل في مستوى الورقة والثاني خارج منها) شدة كل منهما 3 A.



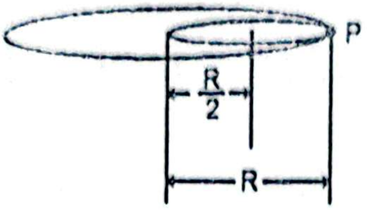
إنّ شدة المجال المغناطيسي الناتج من السلكين عند النقطة P (منتصف الخط الواصل بين السلكين) – أنظر الشكل المرافق– تُساوي:

أ) 100 μT واتجاهه إلى الأعلى (y^+) ب) 60 μT واتجاهه إلى الأعلى (y^+)

ج) 100 μT واتجاهه إلى الأسفل (y^-) د) 60 μT واتجاهه إلى الأسفل (y^-)

7: اعتبر سلكا أسطوانيًا طويلا جدا ونصف قطر قاعدته R = 4 cm. إذا عُمل تجويف في السلك على امتداده نصف قطره 2 cm بحيثُ كان محور التجويف يبعد مسافة مقدارها R/2 عن محـــور السلك وموازيا له.

إذا مُرِّر تيار شدته $i = 3\ A$ في السلك (بعد عمل التجويف)، فإنَّ شدة المجال المغناطيسي في النقطة P (انظر الشكل) تُساوي:



أ) $40\ \mu T$ ب) $30\ \mu T$ جـ) $20\ \mu T$ د) $10\ \mu T$

مساعدة: التيار المُعطى في المسألة هو التيار المار في السلك بعد عمل التجويف وكثافته هي

$$J = \frac{4i}{3\pi R^2}$$

8: ملف لولبي عدد لفاته 1000 لفة وطوله 20 cm ، إنَّ شدة التيار الكهربائي اللازم إمراره في الملف لكي تكون قيمة المجال المغناطيسي داخل الملف 0.04 T تُساوي:

أ) 1.59 A ب) 4.77 A جـ) 6.36 A د) 3.18 A

9: ملف لولبي عدد لفاته 10000 لفة وطوله 2 m، يمر به تيار شدته 3 A. إنَّ شدة المجال المغناطيسي، بوحدة mT، داخل الملف تُساوي:

أ) 6π ب) 3π جـ) 1.5π د) 12π

10: ملف إطاري عدد لفاته 10000 لفة ونصف قطره الداخلي يساوي 20 cm ونصف قطره الخارجي 30 cm ، إنَّ شدة التيار الكهربائي اللازم إمراره في الملف لكي تكون قيمة المجال المغناطيسي في مركز عرى الملف 0.04 T تُساوي:

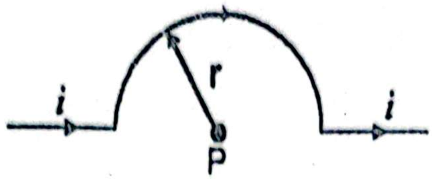
أ) 1 A ب) 5 A جـ) 10 A د) 15 A

مسائل

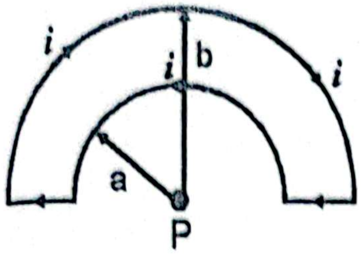
1-9 سلك معدني رفيع طويل ومستقيم يحمل تياراً شدته 4 A . أوجد بعد النقطة (أو النقاط) عن المحور التي يكون فيها شدة المجال المغناطيسي تساوي $20\ \mu T$.

2-9 ثُني سلك معدني رفيع طوله 10 cm على النحو المبيّن في الشكل (9-18). فإذا مر تيار في السلك شدته 5 A، وكان نصف القطر r= 2 cm احسب قيمة المجال المغناطيسي واتجاهه عند النقطة P.

3-9 ثُني سلك معدني رفيع على النحو المبين في الشكل (9-19). إذا مر تيار في السلك شدته 3 A وكانت a = 6 cm و b = 10 cm، فاحسب قيمة المجال المغناطيسي واتجاهه عند النقطة P.



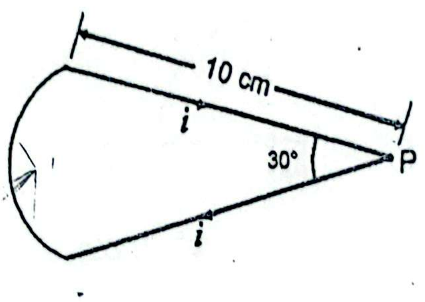
الشكل (9-18)



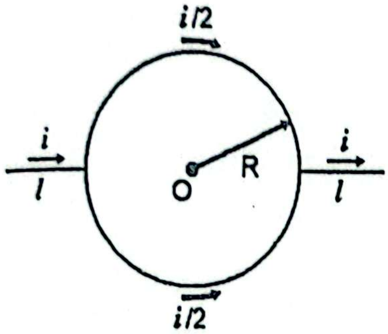
الشكل (9-19)

4-9 يمر تيار شدته 2 A في السلك المبين في الشكل (9-20). أوجد قيمة المجال المغناطيسي واتجاهه عند النقطة P.

5-9 أوجد المجال المغناطيسي عند مركز الحلقة في الشكل (9-21).



الشكل (9-20)



الشكل (9-21)

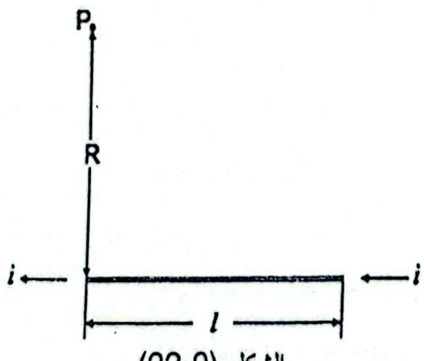
6-9 عروة تيار مربعة الشكل طول ضلعها a، تحمل تيارا شدته i. أثبت أنّ شدة المجال المغناطيسي في مركز العروة تعطى بالعلاقة:

$$B = 2\sqrt{2}\ \mu_0 i/\pi a$$

7-9 ثُني سلك معدني رفيع طوله 6a ليُكوّن مسارا مغلقا على شكل سداسي منتظم، أثبت أنّ شدة المجال المغناطيسي في مركز الشكل السداسي تعطى بالعلاقة:

$$B = \sqrt{3}\ \mu_0 i/\pi a$$

8-9 سلك مستقيم طوله l يحمل تيارا شدته i. أوجد المجال المغناطيسي عند نقطة تقع على العمود المار في أحد طرفي السلك على بعد R من محوره، كما في الشكل (9-22).



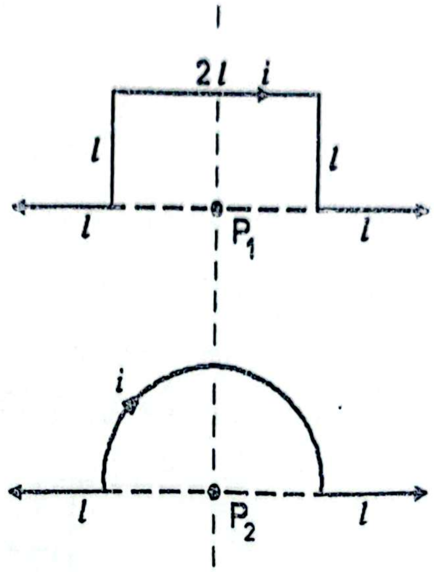
الشكل (9-22)

9-9 ثُني سلك طوله $6l$ على النحو المبين في الشكل (9-23 أ). ثمَّ مُرِّر به تيار شدته i وقيست

شدة المجال المغناطيسي عند النقطة P_1 فوجدت أنها تساوي B_1. ثني نفس السلك مرة أخرى على النحو المبين في الشكل (9-23 ب) ثمَّ مُرِّر به نفس التيار i وقيست شدة المجال المغناطيسي عند النقطة P_2 فوجدت أنها تساوي B_2. أوجد النسبة بين B_1 و B_2.

(أ)

(ب)



الشكل (9-23)

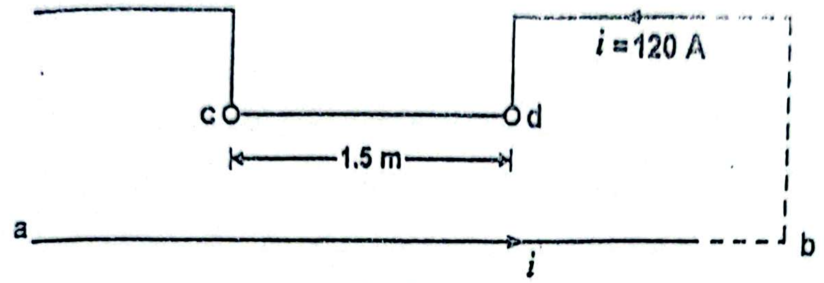
10-9 صفيحة رقيقة دائرية نصف قطرها R وتدور حول المحور x في المستوى yz بسرعة زاوية قدرها ω. إذا علمت أنَّ الصفيحة تحمل شحنة موجبة موزعة عليها بانتظام كثافتها السطحية σ فأثبت أنَّ شدة المجال المغناطيسي عند مركزها يُعطى بالعلاقة:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma \omega R$$

11-9 افترض أنَّ المسافة بين ملفي هلمهولتز (Helmholtz coils) في المثال (9-4) متغيرة وتساوي x. أثبت أنَّ المجال المغناطيسي يكون منتظمًا في النقاط الواقعة على الخط الواصل بين مركزي الملفين عندما تكون $x = R$، حيثُ تُمثل R نصف قطر كل من الملفين

12-9 يبين الشكل (9-24) سلكًا مستقيمًا طويلًا (ab) وموازيًا لسلك آخر (cd)، طوله 1.5 m. إذا كان السلك cd قابلًا للانزلاق بالاتجاه الرأسي على حاملين رأسيين، وإذا كانت كتلته 6 g، فبين أين يتزن هذا السلك عند مرور تيار شدته 120 A في السلكين ab و cd كما في الشكل؟

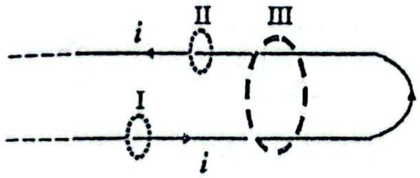
13-9 يتوزع تيار كهربائي i بين سلكين طويلين ومتوازيين، حيثُ يمر في أحدهما جزء i_1 (مثلًا)، ويمر في الآخر $i - i_1$. ما قيمة i_1 التي تجعل القوة المغناطيسية لكل وحدة طول المتبادلة بين السلكين أكبر ما يمكن؟



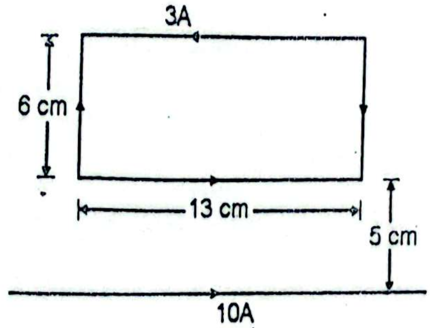
الشكل (9-24)

14-9 يبين الشكل (9-25) سلكا مستقيما لا نهائي الطول يحمل تيارا شدته 10A موضوعا بقرب عروة مستطيلة يمر بها تيار شدته 3A. أوجد محصلة القوى المؤثرة على العروة.

15-9 استخدم قانون أمبير لإيجاد التكامل الخطي للمجال المغناطيسي B للمسارات الثلاثة المغلقة المتقطعة (I، II و III) المبينة في الشكل (9-26).



الشكل (9-26)



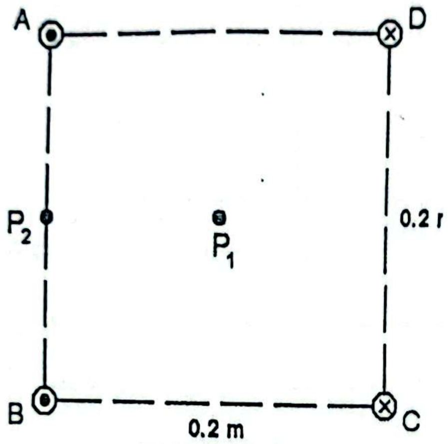
الشكل (9-25)

16-9 سلكان مستقيمان طويلان ومتوازيان، المسافة بينهما 1 m، يحملان تيارين كهربائيين بنفس الاتجاه، شدة الأول 3 A والثاني 5 A. أوجد النقطة (أو النقاط) التي يكون عندها المجال المغناطيسي صفراً.

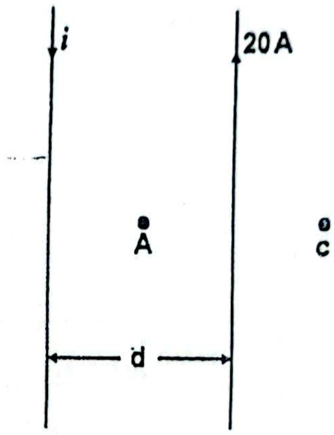
17-9 سلكان مستقيمان متوازيان وطويلان، المسافة بينهما 2 m، يحملان تيارين باتجاهين متضادين قيمتهما على الترتيب 10 A و 25 A. (أ) ما قيمة المجال المغناطيسي الناشئ عن السلك الذي يحمل التيار 10 A، عند موضع السلك الآخر؟ (ب) أوجد مقدار القوة المؤثرة واتجاهها في طول قدره 1 m من السلك الذي يحمل التيار 25 A. (ج) كرر حل الفرع السابق للسلك الآخر الذي يحمل التيار 10 A.

18-9 سلكان مستقيمان متوازيان وطويلان، البعد بينهما $d = 10$ cm، يحملان تيارين باتجاهين متضادين قيمة أحدهما 20 A كما في الشكل (9-27). إذا كان هناك نقطتان الأولى A تقع في منتصف المسافة بين السلكين والثانية C على بعد d/2 من محور السلك الأيمن، ومر تيار i في السلك الأيسر بحيث أصبح المجال المغناطيسي عند النقطة C صفراً فأوجد: (أ) قيمة التيار i. (ب) شدة المجال المغناطيسي عند النقطة A.

19-9 يبين الشكل (9-28) مقطعا عرضيا لأربعة أسلاك طويلة ومتوازية وموضوعة على رؤوس مربع وتحمل تيارات متساوية، قيمة كل منها 3 A بالاتجاهات المبينة في الشكل، حيثُ تشير العلامة ⊗ إلى أنَّ التيار عمودي على الورقة وداخل فيها، وتشير العلامة ⊙ إلى أنَّ التيار عمودي على الورقة وخارج منها. أوجد المجال المغناطيسي عند النقطة: (أ) P_1 الواقعة في مركز المربع. (ب) P_2 الواقعة في منتصف المسافة بين السلكين A و B.



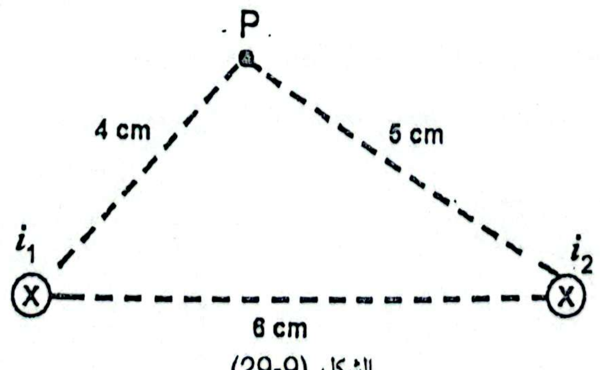
الشكل (9-28)



الشكل (9-27)

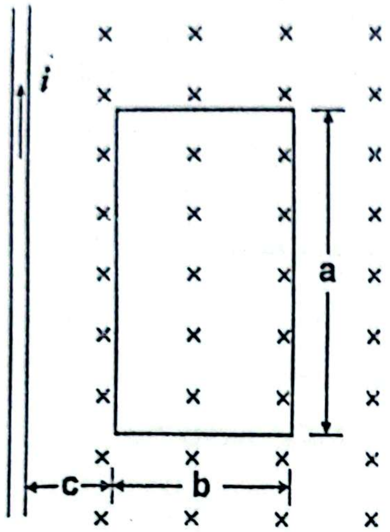
20-9 موصل اسطواني طوله 2 m ونصف قطره 3 cm ويحمل تياراً شدته 12 A موزعاً على مساحة مقطعه العرضي بانتظام. ما شدة المجال المغناطيسي عند نقطة تقع على بعد 6 cm عن محور الموصل؟ افترض أنَّ مكان النقطة بعيد عن كل من طرفي الموصل.

21-9 يبين الشكل (9-29) مقطعاً عرضياً لسلكين طويلين ومتوازيين، يحمل الأول منهما تياراً $i_1 = 3$ A والثاني $i_2 = 6$ A في الاتجاهين المبينين في الشكل. أوجد المجال المغناطيسي عند النقطة P.



الشكل (9-29)

22-9 وُضعت عروة مستطيلة الشكل طولها a وعرضها b على بعد c من سلك طويل يمر به تيار i كما هو مبين في الشكل (9-30). إذا كان السلك الطويل يوازي الطرف الأيسر للعروة فما التدفق المغناطيسي الكلي من سطح العروة؟



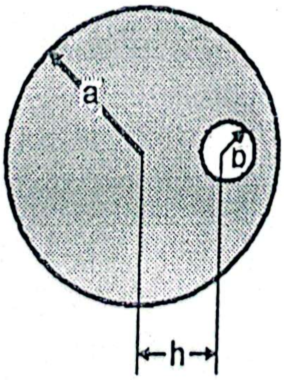
الشكل (9-30)

23-7 يبين الشكل (9-31) مقطعا عرضيا لقشرة اسطوانية موصلة وطويلة، نصف قطرها الخارجي a ونصف قطرها الداخلي b. فإذا وضع سلك اسطواني طويل نصف قطره c (حيثُ b>c) داخل القشرة بحيثُ يتحد محوره مع محور القشرة الأسطوانية، ومرر فيه وفي القشرة تياران متساويان باتجاهين متعاكسين قيمة كل منهما i، فأثبت أنّ شدة المجال المغناطيسي على بعد r عن المحور تساوي:

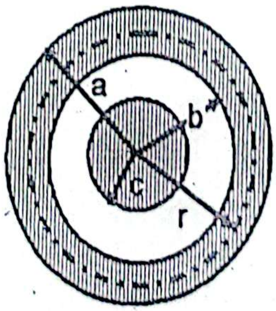
(أ) صفر ؛ (عندما a<r) (ب) $\dfrac{\mu_0\, i\left(a^2-r^2\right)}{2\pi\left(a^2-b^2\right)r}$ ؛ (عندما b<r<a)

(جـ) $\dfrac{\mu_0\ i}{2\pi\ r}$ ؛ (عندما c<r<b) (د) $\dfrac{\mu_0\ i}{2\pi\, c^2}\, r$ ؛ (عندما c>r)

24-9 يبين الشكل (9-32) مقطعا عرضيا لموصل اسطواني طويل نصف قطره a ويحمل تيارا شدته i ويحوي على تجويف اسطواني نصف قطره b ويبعد محوره عن محور الموصل مسافة h. أوجد المجال المغناطيسي عند أية نقطة على محور التجويف.



الشكل (9-32)



الشكل (9-31)

25-9 ملف لولبي طوله 0.5 m ومتوسط نصف قطر مقطعه 3 cm، يحتوي على خمس طبقات

من السلك ملفوفة بشكل متراص بعضها فوق بعض. فإذا احتوت كل طبقة من الملف على 120 لفة وسرى تيار فيه شدته 2 A فاحسب: (أ) شدة المجال المغناطيسي داخل الملف (بعيداً عن طرفيه). (ب) تدفق المجال المغناطيسي من مقطع الملف.

26-9 ملف لولبي نصف قطر مقطعه 5 cm يحتوي على 100 لفة لكل 1 cm طول ويحمل تياراً باتجاه عقارب الساعة (عند النظر من الجهة اليمنى) شدته 100 mA. (أ) ما شدة المجال المغناطيسي داخل الملف (بعيداً عن طرفيه)؟ (ب) ما مقدار واتجاه التيار اللازم إمراره في ملف لولبي آخر عدد لفاته 40 لفة لكل 1 cm يحيط بالملف الأول بإحكام لكي يصبح المجال المغناطيسي الكلي داخل الملف صفراً؟

27-9 ملف لولبي طويل يحتوي على 10,000 لفة لكل 1 m طول. ما مقدار التيار اللازم إمراره في الملف لكي يتحرك إلكترون بداخله بسرعة 2×10^{6} m/s باتجاه عمودي على اتجاه المجال المغناطيسي في مسار دائري نصف قطره 1 mm؟

28-9 ملف إطاري دائري نصف قطره الداخلي 20 cm مصنوع من ملف لولبي مقطعه على شكل مربع طول ضلعه 6 cm وعدد لفاته 1000 لفة. إذا مر تيار فيه شدته 1 A فأوجد شدة المجال المغناطيسي عند نقطة واقعة في مستوى الملف على بعد r من مركزه للحالات الآتية: (أ) r = 10 cm، (ب) r = 23 cm، (جـ) r = 30 cm

الفصل العاشر

الحث الكهرومغناطيسي

وقانون فارادي

Electromagnetic Induction and Faraday's Law

الفصل العاشر

الحث الكهرومغناطيسي وقانون فارادي

(Electromagnetic Induction and Faraday's Law)

1-10 تمهيد

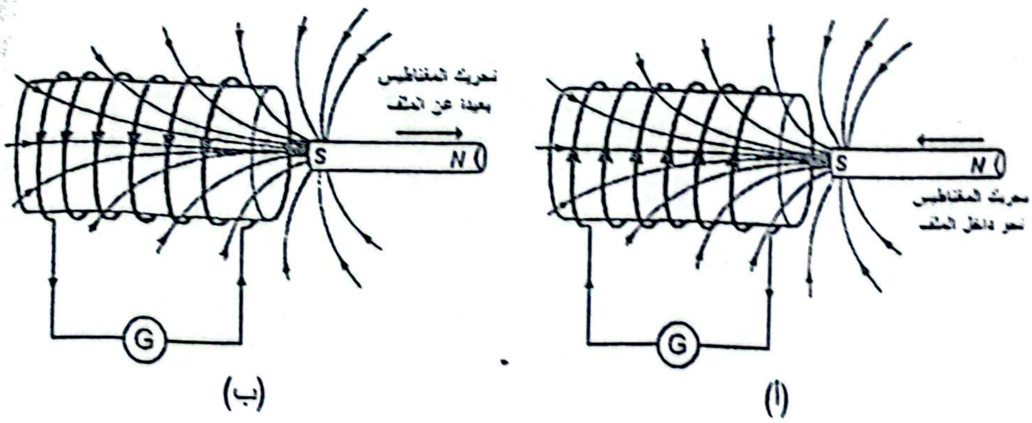
يولد التيار الكهربائي مجالاً مغناطيسياً، ويؤثر المجال بدوره في التيارات والشحنات الكهربائية المتحركة الموجودة فيه بقوة مغناطيسية كما بيَّنا في الفصلين الثامن والتاسع. لقد أدت حقيقة توليد التيار لمجال مغناطيسي هذه بالعلماء إلى التساؤل عما إذا كان بمقدور المجال المغناطيسي أن ينتج تياراً كهربائياً. وجاء الجواب من جوزيف هنري (Joseph Henry) في أمريكا عام (1830)، حيثُ اكتشف أنَّ تغير تدفق المجال المغناطيسي خلال دارة مغلقة يؤدي إلى توليد قوة دافعة وتيار تأثيرين فيها. ولكن هنري لم ينشر نتائج اكتشافه إلا بعد أن أعلن فارادي (Faraday) في إنجلترا عام (1831) عن اكتشافه للقوة الدافعة التأثيريَّة المُتولِّدة فيّ دارة مغلقة عندما يتغير تدفق المجال المغناطيسي خلالها. ولذلك يُعدُّ فارادي مكتشف القوة الدافعة التأثيريَّة هذه باعتباره لم يكن يعلم بأنباء اكتشاف هنري. وقد يكون من الإنصاف اعتبار أنَّ هنري وفارادي قد اكتشفا تلك الظاهرة كل على حدة، بشكل مستقل عن الآخر.

نناقش في هذا الفصل موضوع القوة الدافعة التأثيريَّة وقانون فارادي، الذي يربط بين هذه القوة الدافعة ومقدار تغير التدفق بالنسبة للزمن. كما نناقش بعض التطبيقات على هذا الموضوع. وبذلك نكون قد أكملنا دراسة القوانين الأساسية في الكهرومغناطيسية. ويُمكن تلخيص جميع هذه القوانين في أربع معادلات، تُدعى معادلات ماكسويل (Maxwell's equations)، تُمثِّل مع قانون قوة لورنز (Lorentz force law) نظرية كاملة لوصف تفاعل الأجسام المشحونة بعضها مع بعض. وتربط معادلات ماكسويل المجالين الكهربائي والمغناطيسيّ مع بعضهما، إضافة إلى أنها تربط هذين المجالين مع مصدرهما الأساسي، أي مع الشحنات الكهربائية.

2-10 الحث الكهرومغناطيسي (Electromagnetic Induction)

بعيد اكتشاف أورستد أنَّ التيار الكهربائي قادر على توليد مجال مغناطيسي، وقادر على التأثير في إبرة البوصلة المغناطيسية والتسبب في حركتها، دأب العديد من الفيزيائيين على البحث عن طريقة لتوليد تيار كهربائي بواسطة مجال مغناطيسي. فمن المنطقي أن يكون المجال المغناطيسي قادرا على توليد

تيار كهربائي مثلما أنّ التيار الكهربائي قادر على توليد مجال مغناطيسي. وقد نجح فارادي عام (1831) في اكتشاف هذه الطريقة، حيثُ لاحظ أنّ تحريك مغناطيس خلال ملف من سلك متصل مع غلفانوميتر حساس يحرّك إبرة الغلفانومتر، ممّا يدل على أنّ تياراً كهربائياً قد تولد في الملف. ولاحظ فارادي أنّ تحريك المغناطيس بعيداً عن الملف إلى الخارج يؤدي إلى انحراف إبرة الغلفانوميتر باتجاه مضاد لاتجاه انحرافها الأول. أي أنّ اتجاه التيار المُتولد في الملف يعتمد على اتجاه حركة المغناطيس بالنسبة للملف الساكن، انظر الشكل (10-1). كما لاحظ فارادي أنّ إبرة الغلفانوميتر لا تتحرك عندما يكون المغناطيس ساكناً داخل الملف أو خارجه. ويدعى هذا التأثير الكهربائي للمجال المغناطيسي بالحث الكهرومغناطيسي (electromagnetic induction).



الشكل (10-1)

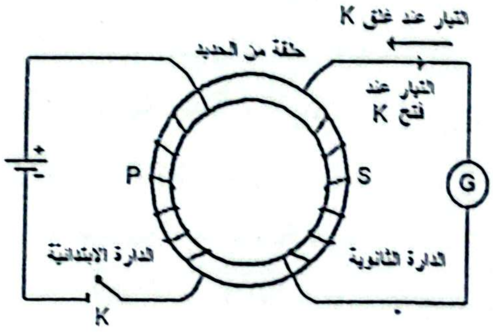
لقد فسّر فارادي ظاهرة الحث الكهرومغناطيسي هذه بقوله إن تياراً كهربائياً يتولد في دارة الملف نتيجة قطع خطوط تدفق المجال المغناطيسي لسلك الملف أثناء حركة المغناطيس. ويُمكن إعادة صياغة هذا التفسير بالقول: "إن قوة دافعة كهربائية تتولد كلما تغير التدفق المغناطيسي خلال الملف". ويسمى التيار المُتولد في الملف عادة بالتيار التأثيري (induced current) للدلالة على أنه ناتج عن التأثير المغناطيسي في سلك الملف. كذلك تسمى القوة الكهربائية المُتولدة في الملف القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة (induced electromotive force) لنفس السبب.

عند تغير التدفق المغناطيسي خلال ملف تتولد قوة دافعة كهربائية، وتسمّى القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة. ويسمّى التيار المُتولّد في الملف بالتيار التأثيري.

إضافة إلى توليد تيار تأثيري في ملف نتيجة حركة مغناطيس خلاله، اكتشف فارادي أنّ تياراً يتولد كذلك في دارة عندما يتغير التيار الكهربائي المار فيّ دارة مجاورة لتلك الدارة، وذلك دون تحريك أي من الدارتين. فعند إغلاق المفتاح K في الدارة المبينة في الشكل (10-2) واندفاع التيار خلال دارة الملف الابتدائي P، يتولد في دارة الملف الثانوي S تيار لحظي يستدل عليه من انحراف إبرة

الغلفانوميتر G. وبمجرد أن تثبت قيمة التيار في الدارة P بعد إغلاق المفتاح K بفترة وجيزة يزول انحراف ابرة الغلفانوميتر. وعند فتح المفتاح K وانحسار التيار عن الدارة الابتدائية P يتولد في الدارة الثانوية S تيار لحظي كذلك، ولكن باتجاه معاكس لاتجاه التيار المُتولد لحظة إغلاق المفتاح K.

ومرة ثانية يفسر هذا التأثير بالقول إن المجال المغناطيسي الناتج عن مرور التيار في الملف الابتدائي P يتغير كلما تغير مقدار أو اتجاه التيار. ويؤدي تغير المجال المغناطيسي إلى تغير عدد خطوط القوة المغناطيسية التي تقطع الملف الثانوي S، مما يؤدي إلى توليد تيار تأثيري فيه. ويقتصر دور المفتاح K على تغيير قيمة التيار المار في الدارة الابتدائية P ممّا يؤدي إلى تغيير تدفق المجال المغناطيسي الناتج عن هذا التيار.



الشكل (2-10)

ويطلق على التأثير المتبادل بين الملفين P و S اسم الحث المتبادل (mutual induction)، ويقال للملفين في هذه الحالة بأنهما يمتلكان خاصية مُحاثة (inductance) متبادلة. وفي نفس الوقت الذي اكتشف به فارادي خاصية الحث المتبادل للملفات المتجاورة، اكتشف هنري أنّ التيار المتغير في دارة مغلقة، أو في عروة (loop)، يولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية في الدارة ذاتها. وقد سمي هذا التأثير بالحث الذاتي (self induction) للدارة.

الحث المتبادل هو الطريقة الأخرى لإنتاج تيارات تأثيريّة.

الحث الذاتي هو تولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية في دارة مغلقة.

□ 3-10 قانون فارادي (Faraday's Law)

بحث فارادي في العوامل التي تؤثر في مقدار القوة الدافعة التأثيريّة ε المُتولدة في دارة مغلقة، وخلص إلى الاستنتاج بأنّ مقدارها يعتمد على سرعة تغير المجال المغناطيسي الذي يتدفق خلال الدارة. حيثُ وجد أنّ ε تزداد بازدياد معدل تغير التدفق المغناطيسي Φ_B، الذي يُعرَف من المعادلة:

$$\Phi_B = \int B.dA \qquad (1-10)$$

[انظر المعادلة (8-6)]. ويُمكن تلخيص استنتاجات فارادي المتعلقة بالقوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة ε، بالمعادلة التالية:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (2\text{-}10\ \text{أ})$$

حيثُ تقاس ε بالفولت ويقاس معدل تغير التدفق المغناطيسي بالويبر لكل ثانية (Wb/s)، أو بـ $T.m^2/s$. وتعرف المعادلة (10-2 أ) باسم قانون فارادي في الحث، وتُعدُّ من العلاقات الأساسية في الكهرومغناطيسية. وإذا كانت الدارة المغلقة مكونة من N من العرى المتماثلة، الملفوفة بشكل متراص، فتصبح المعادلة (10-2 أ) على النحو التالي:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (2\text{-}10\ \text{ب})$$

تهدف الإشارة السالبة في المعادلتين (10-2 أ) و (10-2 ب) إلى تذكيرنا باتجاه القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة. فقد ثبت بالتجربة أنَّ القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة هذه تعطي تياراً يولد مجالاً مغناطيسياً معاكساً في اتجاهه للتغير في التدفق المغناطيسي الأصلي (الذي أدى تغيره إلى توليد القوة الدافعة التأثيريَّة). ويعرف هذا عادة بقانون لنز(Lenz's Law)، نسبة لهنري لنز (Henry Lenz) الذي قام بسلسلة تجارب عام (1834) (في روسيا) أدت إلى تحديد اتجاه القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة نتيجة تغير التدفق المغناطيسي في دارة مغلقة. ولتوضيح قانون لنز نطبقه في حالة حركة مغناطيس نحو ملف، كما في الشكل (10-1 أ).

يؤدي تغير التدفق المغناطيسي الناتج عن زيادة عدد خطوط المجال المتدفقة خلال الملف عند اقتراب المغناطيس منه، إلى توليد تيار تأثيري في الملف. ويولد التيار التأثيري مجاله المغناطيسي الخاص به. وبما أنَّ التدفق المغناطيسيَ في حالة تزايد أثناء اقتراب المغناطيس من الملف، واتجاهه خارج من الملف وداخل في قطب المغناطيس الجنوبي (S)، فإن المجال المغناطيسي الذي يولده التيار التأثيري يكون متجهاً بعيداً عن القطب الجنوبي S نحو داخل الملف، بحيثُ يكون قادراً على مقاومة التغير في تدفق المجال المغناطيسي خلال الملف. وعليه يُمكن تحديد اتجاه التيار التأثيري المُتولِّد في دارة الملف على النحو الموضح في الشكل (10-1 أ). وفي الشكل (10-1 ب) يتناقص التدفق المغناطيسي خلال الملف بسبب ابتعاد المغناطيس عنه، ولذلك يجب أن يُولِّد التيار التأثيري المتولِّد في هذه الحالة مجالاً مغناطيسياً يقاوم التغير في التدفق، أي يقاوم التناقص في التدفق. ويتحقّق هذا إذا كان المجال المغناطيسي الناتج عن التيار التأثيري متجهاً إلى الخارج، وكأنه مُمثِّل لقطب شمالي N يعمل على جذب طرف المغناطيس الجنوبي S إليه، وبالتالي يقاوم حركته ويقاوم التغير في التدفق المرافق له. وبناء عليه فإن اتجاه التيار التأثيري المُتولِّد في هذه الحالة يكون على النحو المبين في الشكل (10-1 ب)، ويُمكن استخدام قاعدة اليد اليمنى للربط بين اتجاه المجال والتيار التأثيريين.

وعودة إلى القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة ε المُتولِّدة في الدارة المغلقة. يجب أن نتذكر دائماً أنَّ ε

تتولد كلما كان هنالك تغير في التدفق المغناطيسي. وبتعويض Φ_B المعادلة (10-1) في المعادلة (10-2 أ) نجد أنّ:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int B\cos\theta\, dA \qquad (3\text{-}10)$$

وهذا يعني أنه يُمكن توليد القوة الدافعة التأثيريّة ε بإحدى ثلاث طرق: (1) بواسطة مجال مغناطيسي متغيّر (B)، أو (2) بواسطة تغيُّر مساحة الدارة المغلقة أو العروة (A)، أو (3) بتغيير اتجاه مساحة الدارة أو العروة (θ) بالنسبة للمجال.

قانون فارادي: القوة الدافعة التأثيريّة ε الناتجة عن تحريك مجال مغناطيسي داخل ملف تساوي معدل التغير الزمني في تدفق المجال المغناطيسي.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}.d\mathbf{A}$$

ينصُ قانون لنز على أنّ "اتجاه التيار التأثيري يكون بحيثُ يكون اتجاه المجال المغناطيسي التأثيري الناتج عنه مُعاكساً للتغير في التدفق المغناطيسي الأصلي".

وتُمثّل الإشارة السالبة في قانون فارادي قانون لنز.

■ مثال (10-1)

ملف مكون من 250 لفة ملفوفة بشكل مرصوص على إطار مستطيل طوله 20 cm وعرضه 10 cm. إذا علمت أنّ المقاومة الكلية لسلك الملف الكلية 3 Ω، وأنّ مجالاً مغناطيسياً متعامداً مع مستوى الملف يتغير بانتظام من صفر إلى 2 T خلال 1.2 s، فأوجد: (أ) مقدار القوة الدافعة الكهربائية المُتولدة بالتأثير في الملف أثناء تغير المجال. (ب) مقدار التيار التأثيري المُتولّد في الملف أثناء تغير المجال.

الحل:

(أ) نجد أولاً مساحة الملف (A)، حيثُ

$$A = 20\ \text{cm} \times 10\ \text{cm} = 200\ \text{cm}^2 = 0.02\ \text{m}^2$$

إن تدفق المجال المغناطيسي Φ_B خلال الملف عند اللحظة الزمنية $t = 0$ يساوي صفراً، وذلك لأنّ المجال B يساوي صفراً في تلك اللحظة. ويتغير تدفق المجال ليصبح في اللحظة $t = 1.2$ s مساوياً:

$$\Phi_B = B\,A = 2\ \text{T} \times 0.02\ \text{m}^2 = 0.04\ \text{Wb}$$

لذلك يُعطى مقدار القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة ε بالمعادلة:

$$|\varepsilon| = \frac{N\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

$$= \frac{250\ (0.04\ Wb - 0\ Wb)}{(1.2\,s - 0\,s)} = 8.33\ V$$

(ب) بتطبيق قانون أوم نحصل على قيمة التيار التأثيري i المُتولد في الملف، على النحو التالي:

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{8.33\,V}{3\Omega} = 2.78\ A$$

مثال (10-2)

وضعت عروة تيار مستوية مساحتها A في منطقة مجال مغناطيسي B، بحيثُ كان مستواها متعامدًا مع اتجاه المجال. إذا كان المجال المغناطيسي يتغير بمرور الزمن وفقًا للعلاقة $B = B_0\, e^{-at}$، حيثُ B_0 و a مقداران ثابتان و t الزمن بالثواني. فما القوة الدافعة الكهربائية المُتولدة في العروة في أية لحظة زمنية t؟

الحل:

بما أنّ المجال عمودي على مستوى العروة، فإن تدفق المجال المغناطيسي من العروة يُعطى بالمعادلة:

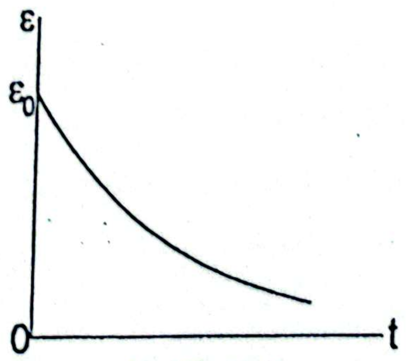
$$\Phi_B = B\cdot A = A\,B_0\, e^{-at}$$

وبذلك تُعطى القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة بالمعادلة:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A B_0 \frac{d}{dt} e^{-at}$$

$$= a A B_0\, e^{-at}$$

أي إن ε تضمحل أسيا (exponentially) بمرور الزمن. وتلاحظ أنّ أكبر قيمة لها تتولد في اللحظة $t = 0$، حيثُ تُعطى قيمتها العظمى ε_0 بالمعادلة:



الشكل (10-3)

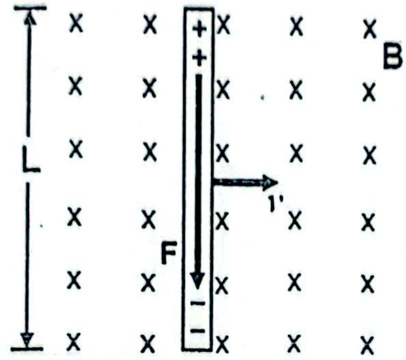
$$\varepsilon_0 = a A B_0$$

ويبين الشكل (10-3) العلاقة بين ε و t.

□ 4-10 القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية المتولدة في موصل متحرك

(Induced Electromotive Force in a Moving Conductor)

يُمكن توليد قوة دافعة كهربائية عن طريق حركة موصل في مجال مغناطيسي. لنفترض أنّ موصلاً مستقيماً طوله L يتحرك بسرعة ثابتة v باتجاه عمودي على مجال مغناطيسي منتظم B، كما في الشكل



الشكل (4-10)

(4-10). إن هذا سيؤدي إلى تأثير المجال المغناطيسي على الإلكترونات الحرة الموجودة في الموصل بقوة مغناطيسية $qv\times B$، إذ أنّ الإلكترونات تتحرك في المجال بسرعة قيمتها المتوسطة v. وتؤدي هذه القوة إلى تحريك الإلكترونات نحو نهاية الموصل السفلية وتجمعها هناك تاركة وراءها تجمعاً لشحنات موجبة عند نهاية الموصل العلوية. وينتج عن نزوح الإلكترونات هذه من طرف الموصل العلوي إلى طرفه السفلي مجال كهربائي E داخل الموصل. وتستمر عملية فصل الشحنات السالبة عن الموجبة في الموصل تحت تأثير القوة $q\,v\,B$ إلى أن تصبح القوة الكهربائية $q\,E$ قادرة على موازنة القوة المغناطيسية، حيثُ تؤثر القوتان باتجاهين متضادين على الإلكترونات المتحركة بين نهايتي الموصل العلوية والسفلية. وعندئذ يتوقف نزوح المزيد من الإلكترونات، ويتطلب هذا أن يكون:

$$q\,E = q\,v\,B \text{ ، أي أنّ: } E = v\,B$$

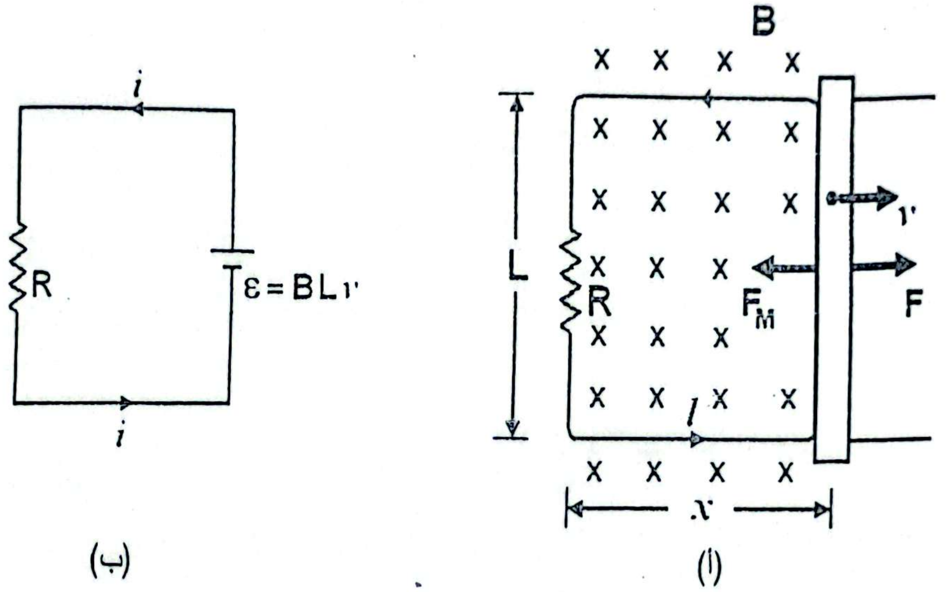
للحفاظ على حالة الاتزان. ويؤدي المجال الكهربائي داخل الموصل إلى ظهور فرق في الجهد V بين طرفيه يُعطى بالمعادلة التالية:

$$V = E\,L = B\,L\,v \qquad (4\text{-}10)$$

حيثُ يكون جهد الطرف العلوي للموصل أعلى من جهد الطرف السفلي له، ويظل فرق الجهد هذا موجوداً بين طرفي الموصل ما دام الموصل متحركاً في المجال. وإذا تحرك الموصل بالاتجاه المعاكس ينعكس قطباه، فيصبح الطرف العلوي سالباً والطرف السفلي موجباً. ويُمثّل الموصل المستقيم المتحرك خلال المجال في هذه الحالة مصدراً للقوة الدافعة الكهربائية، إذ إن فرق الجهد بين طرفيه يستطيع أن يولد تياراً كهربائياً إذا ما وصل الطرفان إلى بعضهما في دارة مغلقة.

افترض الآن أنّ الموصل المستقيم السابق ينزلق بدون احتكاك على سلك موصل آخر على شكل حرف U، كما في الشكل (10-5 أ) داخل مجال مغناطيسي منتظم B، بسرعة ثابتة v، متعامدة مع اتجاه المجال تحت تأثير قوة F. إن هذا سيؤدي إلى تأثر الإلكترونات الحرة في الموصل المتحرك بقوة

مغناطيسية تدفعها بموازاة محور الموصل مُولّدة تياراً تأثيراً، كما أسلفنا. وعليه فإن تياراً كهربائياً سيسري خلال المسار المغلق المكون من الموصل المستقيم والسلك الذي ينزلق عليه الموصل. من ناحية أخرى، تؤدي حركة الموصل المستقيم إلى تغير مساحة المسار المغلق (أو العروة) ومن ثمَّ إلى زيادة تدفق المجال المغناطيسي Φ_B خلال المسار، إذ أنَّ:



الشكل (5-10)

$$\Phi_B = BA = BLx$$

حيثُ تُمثّل x عرض العروة، كما في الشكل (5-10 أ). وبتطبيق قانون فارادي، نستنتج أنَّ:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLx) = -BL\frac{dx}{dt}$$

أي أنَّ:

$$\varepsilon = -BLv \qquad (5\text{-}10)$$

وتتفق هذه النتيجة مع قيمة فرق الجهد بين طرفي الموصل المستقيم، المعادلة (4-10) التي توصلنا إليها دون استخدام قانون فارادي. ويُمكن إيجاد قيمة التيار i المُتولّد في الدارة باستخدام قانون أوم. فإذا كانت مقاومة الدارة R فإنَّ:

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BLv}{R} \qquad (6\text{-}10)$$

ويُمكن رسْم الدارة المكافئة للعروة في هذه الحالة على النحو المبين في الشكل (5-10 ب).

بما أنَّ الدارة لا تحتوي أصلاً على مصدر قوة دافعة كهربائية، فقد يتساءل البعض عن مصدر التيار التأثيري المُتولّد، وعن مصدر الطاقة الكهربائية المرافقة له. وبالواقع ينجم التيار التأثيري (والطاقة الكهربائية) عن الطاقة الميكانيكية المبذولة في تحريك الموصل، حيثُ تبذل القوة المؤثرة على الموصل

شغلاً ميكانيكيا عليه أثناء حركته. ويلزم بذل هذه القوة للتغلب على القوة المغناطيسية $i\,L\,B$ التي تصاحب تولد التيار i وتحاول أن تعيق الحركة، كما يتضح من الشكل (10-5 أ). وحيثُ أنّ الموصل ينزلق بسرعة ثابتة فإنّ تسارعه يكون صفرا، أي أنّ القوة المُحصّلة المؤثرة عليه تساوي صفرا، بمعنى أنّ القوة المغناطيسية F_M تساوي في مقدارها القوة F المسببة لانزلاق الموصل. وعليه يُمكن حساب الشغل الميكانيكي الذي تبذله القوة F في ثانية واحدة (أي قدرتها) على النحو التالي:

$$P = \mathrm{F} \cdot v = F v = i\,\mathrm{L}\,B\,v$$

وبالتعويض عن قيمة التيار i من المعادلة (10-6)، نستنتج أنّ:

$$P = i\,\mathrm{L}\,B v = \frac{B^2\,\mathrm{L}^2\,v^2}{\mathrm{R}} \qquad (7\text{-}10)$$

وبالمقابل فإن الطاقة الكهربائية المُتولّدة في الثانية الواحدة في الدارة (أي القدرة الناتجة) تُعطى بالمعادلة:

$$P = i^2\,\mathrm{R} = \left(\frac{B\mathrm{L}\,v}{\mathrm{R}}\right)^2 \mathrm{R} = \frac{B^2\,\mathrm{L}^2\,v^2}{\mathrm{R}} \qquad (8\text{-}10)$$

ويتضح من مقارنة المعادلة (10-7) بالمعادلة (10-8)، أنّ القدرة الكهربائية المُتولّدة تساوي القدرة الميكانيكية المبذولة في تحريك الموصل. فالطاقة إذن محفوظة كما هو معلوم، وكل ما في الأمر هنا أنها تتحول من شكل (ميكانيكي) إلى شكل آخر (كهربائي). وبقي أن نحدّد اتجاه التيار التأثيري المُتولّد في العروة نتيجة تغير التدفق المغناطيسي خلالها. حيثُ تؤدي حركة الموصل إلى اليمين إلى زيادة تدفق المجال المغناطيسي بالاتجاه الداخل في مستوى الورقة. ولذلك يجب أن يكون اتجاه التيار التأثيري في العروة بعكس عقارب الساعة لكي يكون المجال المغناطيسي الناجم عنه قادراً على مقاومة التغير في التدفق، وفقا لقانون لنز. فالمفروض في هذا المجال أن يقاوم تزايد تدفق المجال المغناطيسي الأصلي خلال العروة، ويتحقق هذا عندما يكون المجالان متضادين. ولو كانت حركة الموصل المستقيم نحو اليسار (بدلاً من اليمين) فإن التغير في التدفق المغناطيسي يكون تناقصا، وعندها يجب أن يعمل المجال المغناطيسي الناشئ عن التيار التأثيري مع عقارب الساعة لكي يعزز التدفق ويحاول أن يمنع تناقصه (أي تغيره).

مثال (10-3)

تطير طائرة بسرعة 1000 km/h في مجال الأرض المغناطيسي البالغ 5×10^{-5} T، باتجاه رأسي تقريبا. ما مقدار فرق الجهد المُتولّد بين طرفي جناحيها اللذين يبعدان 70 m عن بعضهما؟

الحل:

$$v = 1000\ \mathrm{km/h} = (1000\times10^3\ \mathrm{m})/(3600\ \mathrm{s}) \approx 278\ \mathrm{m/s}$$

وبالتعويض في المعادلة (10-4)، نستنتج أنّ:

$$V = B\,L\,v = (5\times10^{-5}\ \text{T}) \times (70\ \text{m}) \times (278\ \text{m/s}) = 0.97\ \text{V}$$

وهذا مقدار بسيط لا خطر منه على الطائرة.

مثال (4-10)

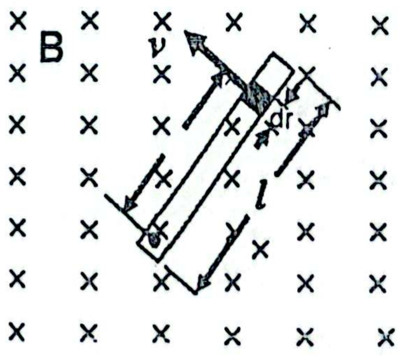
يدور قضيب موصل طوله l بسرعة زاوية ثابتة ω حول دعامة مثبتة عند أحد طرفيه. إذا كان القضيب يتحرك في مجال مغناطيسي منتظم B داخل في مستوى الورقة، كما في الشكل (6-10)، فما مقدار القوة الدافعة الكهربائية المُتولِّدة بين طرفي القضيب؟

الحل:

لو أخذنا قطعة طولها dr من القضيب وسرعتها v، فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة المتولِّدة فيها تُعطى حسب المعادلة (5-10) على النحو التالي:

$$d\varepsilon = B\,v\,dr \qquad (9\text{-}10)$$

وبما أنَّ جميع أجزاء القضيب تتحرك باتجاه عمودي على اتجاه المجال فإن القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة المُتولِّدة في كل واحد من هذه الأجزاء تُعطى بالمعادلة (9-10). وبإجراء عملية تكامل لجميع أجزاء القضيب الواقعة بين نهايتيه، نجد أنَّ:



الشكل (6-10)

$$\varepsilon = \int B\,v\,dr = B\int v\,dr = B\omega\int_0^l r\,dr$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{1}{2}B\,\omega\,l^2$$

مثال (5-10)

عروة مستطيلة الشكل طولها 10 cm وعرضها 5 cm تدور حول محور تماثلها الموازي لضلعيها الطويلين بسرعة زاوية قدرها 100 rad/s، في مجال مغناطيسي منتظم شدته 2×10^{-2} T عمودي على محورها. إذا كانت العروة مكونة من عشر لفات، فما مقدار القوة الدافعة الكهربائية العظمى المُتولِّدة في العروة؟

الحل:

يُمكن إيجاد تدفق المجال المغناطيسي Φ_B من العروة من المعادلة:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B}.\mathbf{A} = BA\cos\theta$$

حيثُ تُمثّل θ الزاوية بين متجهي المجال والمساحة. وبتطبيق قانون فارادي [المعادلة (10-2 ب)] نجد أنّ:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}(BA\cos\theta)$$
$$= +NBA\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

وباستخدام العلاقة بين الإزاحة الزاوية والسرعة الزاوية ($\omega = d\theta/dt$)، نستنتج أنّ:

$$\varepsilon = N\,B\,A\,\omega\,\sin\theta \qquad (10\text{-}10)$$

ويتضح من المعادلة (10-10) أنّ القوة الدافعة الكهربائية المُتولدة تكون أكبر ما يُمكن ε_0 عندما تكون $\theta = 90°$، وعليه فإنّ:

$$\varepsilon_0 = N\,B\,A\,\omega$$
$$= (10)\times(2\times10^{-2}\ \text{T})\times(0.05\ \text{m}\times0.10\ \text{m})\times(100\ \text{rad/s})$$
$$= 0.1\ \text{V}$$

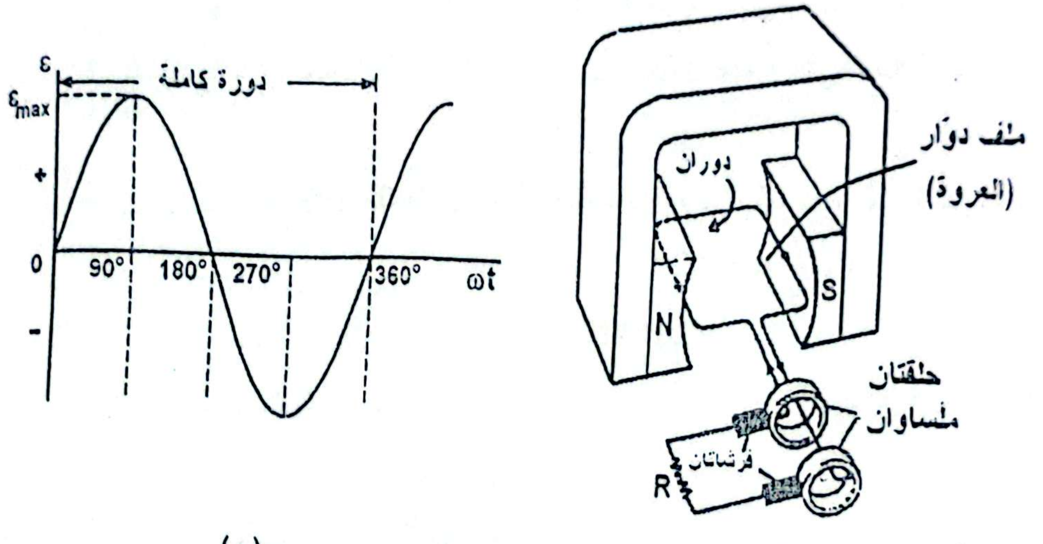
□ 10-5 المُولّد الكهربائي (The Electric Generator)

يُعدُّ مُولِد الكهرباء من الأجهزة الهامة التي تعتمد على مبدأ الحث الكهرومغناطيسي في عملها. ففي مُولدات التيار المتردد (ac أو alternating current)، تُحوّل الطاقة الميكانيكية إلى طاقة كهربائية. ويتكون المُولد في ابسط صوره من عروة تيار تدور بقوة ميكانيكية في مجال مغناطيسي، كما في الشكل (10-7 أ). فعند دوران العروة يتغير تدفق المجال المغناطيسي خلالها بمرور الزمن ممّا يؤدي إلى تولد قوة كهربائية فيها، وفقاً للمعادلة (10-2)، ويتصل سلكا العروة بحلقتين موصلتين ملساوتين ومثبتتين حول محور الدوران وملامستين لفرشاتين معدنيتين. وتستطيع الحلقتان الدوران مع العروة، في حين أنّ الفرشاتين تعملان على نقل التيار التأثيري الناتج عن القوة الدافعة الكهربائية المُتولدة إلى الأجهزة الكهربائية التي تعمل على الطاقة الكهربائية المُولّدة والتي تُمثّلها المقاومة الكهربائية R المبينة في الشكل.

يُمكن حساب القوة الدافعة الكهربائية ε المُتولدة عند دوران العروة في المجال المغناطيسي B بشكل مماثل للطريقة المتبعة في حل المثال (10-5) للحصول على المعادلة (10-10). فإذا كان ملف المُولد (أو عروته) مكونا من عدد N من اللفات، وكانت مساحة كل منها A، وكانت الزاوية بين المتجه العمودي على مستوى الملف A ومتجه المجال B هي θ، فإن تدفق المجال المغناطيسي خلال الملف

Φ_B يُعطى بالمعادلة:

$$\Phi_B = B\,A \cos\theta = B\,A\cos\omega t$$



(ب) (أ)

الشكل (7-10)

حيثُ تُمثّل ω السرعة الزاوية لدوران الملف، أي أنّ ωt = θ. وبالتالي تُعطى القوة الدافعة ε باستخدام المعادلة (2-10) على النحو التالي:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = N\,A\,B\,\omega \sin\omega t \qquad (11\text{-}10)$$

ويتضح من هذه العلاقة أنّ القوة الدافعة الكهربائية ε تتغير بشكل جيبي (sinusoidal) مع تغير الزمن، كما هو مبين في الشكل (7-10 ب)، وأنّ قيمتها المطلقة تكون أكبر ما يُمكن (ε_{max}) عندما تكون $\omega t = 90°$ أو $\omega t = 270°$، اي انّ:

$$\varepsilon_{max} = N\,A\,B\,\omega \qquad (12\text{-}10)$$

كما يتضح أيضا من نفس العلاقة أنّ القوة الدافعة الكهربائية ε تكون صفراً عندما تكون $\omega t = 0°$ أو $\omega t = 180°$.

المُولّد الكهربائي جهاز يُستخدم لتوليد قوة دافعة كهربائيّة باستخدام مبدأ الحث الكهرومغناطيسي.

الفكرة الأساسيّة لعمل مُولّد كهربائي هي في استخدام ملف يدور في مجال مغناطيسي.

أي تحويل الطاقة الحركيّة المستخدمة في تحريك الملف إلى طاقة كهربائيّة.

مثال (6-10)

مُولّد تيار متردد يحتوي على 12 لفة، ومساحة مستوى ملفه $A = 0.1\ m^2$، ومقاومة ملفه $8\ \Omega$. يدور ملف المُولّد في مجال مغناطيسي منتظم شدته $B = 0.2\ T$ بمعدل 50 دورة لكل ثانية. أوجد: (أ) القوة الدافعة الكهربائية العظمى التي ينتجها المُولّد. (ب) القيمة العظمى للتيار التأثيري الناتج في ملف المُولّد.

الحل:

(أ) نجد التردد الزاوي (السرعة الزاوية) ω للملف المُولّد من العلاقة $\omega = 2\pi f$ حيثُ تُمثّل f عدد دورات الملف في الثانية الواحدة. أي أنّ:

$$\omega = 2\pi f = 2\times3.14\times50 = 314\ rad/s$$

وبالتعويض في المعادلة (10-12) نجد القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة العظمى المُتولدة على النحو التالي:

$$\varepsilon_{max} = N\,A\,B\,\omega$$

$$= 12 \times 0.1 \times 0.2 \times 314 = 75.36\ V$$

(ب) بتطبيق قانون أوم، واستخدام نتيجة الفرع (أ) يُمكن إيجاد القيمة العظمى للتيار المُتولد i_0 كما يلي:

$$i_0 = \frac{\varepsilon_{max}}{R}$$

$$= \frac{75.36\,V}{8\,\Omega} = 9.42\,A$$

10-6 المجال الكهربائي المُتولّد عن تغيُّر التدفق المغناطيسي

رأينا عند مناقشتنا لكيفية تولد التيار داخل موصل في الفصل السادس، أنّ التيار في الموصل ينتج عن مجال كهربائي داخل الموصل. ورأينا كذلك أنّ دور مصدر فرق الجهد بين طرفي الموصل هو توليد هذا المجال الكهربائي داخله حيثُ تكسب الإلكترونات الحرة في الموصل سرعة انسياق v من المجال المُتولد، وينشأ عن انسياقها التيار الكهربائي. وفي حالة حركة موصل ما خلال مجال مغناطيسي يتولد في الموصل تيار كهربائي، كما أسلفنا. ويعني هذا أنّ مجالاً كهربائياً قد تولد داخل الموصل نتيجة قطعه لخطوط المجال المغناطيسي. ويرتبط المجال الكهربائي المُتولد **E** مع المجال المغناطيسي **B** وسرعة الانسياق v بالعلاقة $E = v\,B$ عندما تكون حركة الموصل باتجاه عمودي على المجال **B** [انظر البند (10-4)]. ويُمكن كتابة صيغة عامة للمجال **E** عندما لا تكون v عمودية على **B**، على النحو التالي:

$$\mathbf{E} = -\,v \times \mathbf{B} \qquad (10\text{-}13)$$

وذلك استناداً على قانون قوة لورنز.

وفي الحالات التي يتولد التيار الكهربائي بها نتيجة تغير تدفق المجال المغناطيسي خلال مسار مغلق أو خلال عروة (بدلاً من تولده نتيجةً حركة الموصل أو العروة)، يعني تولد التيار كذلك أنَّ هنالك مجالاً كهربائياً قد تولد داخل العروة.

وهكذا نتوصل إلى الاستنتاج أنَّ " تَغيُّر تدفق المجال المغناطيسي يُولد مجالاً كهربائياً ". ولا ينطبق هذا على الموصلات والعرى فحسب، بل إنه ينطبق على أية منطقة في الفراغ. إذ إنه يتولد مجال كهربائي في الفراغ عند أية نقطة إذا كان فيها مجال مغناطيسي متغير.

تُعبِّر القوة الدافعة الكهربائية ε المُتولدة في عروة عن الشغل المبذول في نقل وحدة الشحنات الموجبة خلال العروة بواسطة المجال الكهربائي. ولذلك فإنها ترتبط مع المجال **E** ومع عناصر الإزاحة dl على طول المسار المغلق (المكون للعروة) بالمعادلة التالية:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathit{l} \qquad (14\text{-}10)$$

وبالتعويض عن قيمة ε من قانون فارادي، المعادلة (10-2)، نستنتج أنَّ:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathit{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (15\text{-}10)$$

وتُمثّل المعادلة (10-15) العلاقة بين تغير التدفق المغناطيسي والمجال الكهربائي الناتج عنه. ويحيط المسار المغلق (الطرف الأيسر من المعادلة) بالمنطقة التي يتغير التدفق المغناطيسي Φ_B خلالها. ويُمكن النظر إلى هذه المعادلة على أنها صياغة حديثة لقانون فارادي، تتحقق أينما كان داخل الموصلات أو في الفراغ.

يختلف المجال الكهربائي المُتولد نتيجة تغير التدفق المغناطيسي عن المجال الكهربائي المُتولد عن شحنات كهربائية ساكنة (المسمى بالمجال الساكن). ففي حالة المجال الساكن تبدأ خطوط المجال من شحنات كهربائية ساكنة وتنتهي في شحنات كهربائية ساكنة أخرى، بينما تكون خطوط المجال الكهربائي الناشئ عن تغير تدفق المجال المغناطيسي على شكل مسارات مستمرة مغلقة. وزيادة على ذلك، فإن الفرق في الجهد بين نقطتين في مجال كهربائي ساكن كالنقطتين a و b مثلاً، يُعطى بالمعادلة:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E}.d\mathit{l}$$

فإذا طبقنا هذه المعادلة على مسار مغلق، تكون النقطتان a و b منطبقتين على بعضهما ويصبح فرق الجهد بينهما صفراً ($V_{ab} = 0$). لذلك يكون تكامل المجال الكهربائي حول المسار المغلق صفراً.

$$\oint \mathbf{E}.d\mathit{l} = 0 \qquad \text{(للمجال الكهربائي الساكن)}$$

والسبب في هذا، بالطبع، هو كون القوة الكهربائية الساكنة قوة محافظة (conservative force)، حيث تخبرنا المعادلة السابقة أنّ الشغل المبذول في نقل وحدة الشحنات الموجبة حول أي مسار مغلق يساوي صفراً، أو أنّ الشغل المبذول في نقل الشحنات بين أية نقطتين لا يعتمد على المسار المتبع، كما رأينا في الفصل الرابع. أما في الحالة غير الساكنة، أو الحالة التحريكية، عندما يتولد مجال كهربائي نتيجة تغير التدفق المغناطيسي، فإن التكامل حول مسار مغلق لا يساوي صفراً ولكنه يُعطى بالمعادلة (10-15) التالية:

$$\oint E.dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

وهذا يدل على أنّ القوى الناتجة عن المجالات المغناطيسية المتغيرة ليست قوى محافظة (nonconservative forces). ولذلك لا نستطيع أن نُعرّف طاقة وضع (potential energy) في حالة المجالات غير الساكنة. ومع أنّ المجالات الكهربائية الساكنة محافظة، إلا أنّ المجالات الكهربائية الناتجة عن مجالات مغناطيسية متغيرة لا تكون محافظة.

يُولّد المجال المغناطيسي المتغير مجالاً كهربائيًا يُعطى بالعلاقة: $\oint E.dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

إنّ المجال الكهربائي التأثيري E يختلف في طبيعته عن المجال الكهربائي الناتج عن شحنة ساكنة.

في حين أنّ القوى الناتجة عن شحنات ساكنة قوى محافظة فإنّ القوى الناتجة عن المجالات المغناطيسية المتغيرة ليست قوى محافظة. ولذلك لا نستطيع أن نُعرّف طاقة وضع في حالة المجالات غير الساكنة.

مثال (10-7)

يُنتج مغناطيس كهربائي مجالاً مغناطيسياً منتظماً B في المنطقة الواقعة بين قطبيه الدائريين، كما في الشكل (10-8 أ). بدأ التيار في ملف المغناطيس بالتزايد التدريجي مع مرور الزمن فنتج عن ذلك تغير المجال المغناطيسي بانتظام (ثابت = dB/dt) عند جميع النقاط الواقعة بين القطبين. إذا علمت أنّ المجال المغناطيسي خارج منطقة القطبين يساوي صفراً دائماً، فأوجد المجال الكهربائي E عند أية نقطة مثل P تبعد مسافة r عن مركز أحد القطبين الدائرين وتقع في مستواه.

الحل:

يؤدي تغير المجال المغناطيسي خلال دائرة نصف قطرها r كما هو مبين في الشكل (10-8 أ)، إلى توليد قوة دافعة كهربائية تأثيرية حول الدائرة. وبما أنّ جميع النقاط الواقعة على محيط المسار الدائري

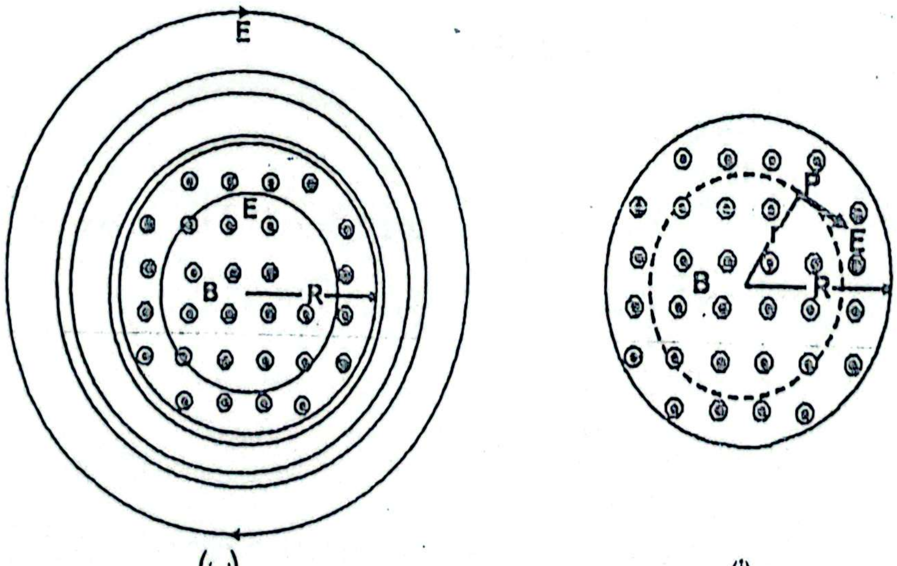
المغلق متماثلة بالنسبة للمركز، فإنَّ المجال الكهربائي المُتولد سيكون متماثلا أيضا. ولذلك فإنَّ المجال E المتوقع يكون عموديا على اتجاه B ومماسا للدائرة التي نصف قطرها r، كما هو مبين في الشكل، ويكون مقداره ثابتا عند جميع النقاط الواقعة على محيط الدائرة. لذلك فإننا نستخدم هذا المسار الدائري لإجراء عملية المكاملة في المعادلة (10-15)، حيثُ نجد أنَّ:

$$\oint \mathbf{E}.dl = E(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt} \;;\; (r \le R)$$

وذلك لأنَّ $\Phi_B = BA = B(\pi r^2)$ في أية لحظة. وعند حل المعادلة السابقة للمجال E، نستنتج أنَّ:

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \;;\; (r \le R) \qquad (16\text{-}10)$$

وتتحقق المعادلة (10-16) حتى حافة الدائرة r = R، إذ إن المجال المغناطيسي يصبح صفرا بعد هذه الحافة. وإذا أخذنا نقطة P تقع خارج المنطقة بين القطبين وتبعد عن المركز r (حيثُ r>R)، فإن تدفق المجال المغناطيسي خلالها يكون $\Phi_B = \pi R^2 B$. ويُمكن إيجاد المجال الكهربائي E عند أية نقطة على محيط المسار الدائري r كما يلي:



(ب) (أ)

الشكل (10-8)

$$\oint \mathbf{E}.dl = E(2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \;;\; (r > R)$$

$$\therefore\; E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \;;\; (r > R) \qquad (17\text{-}10)$$

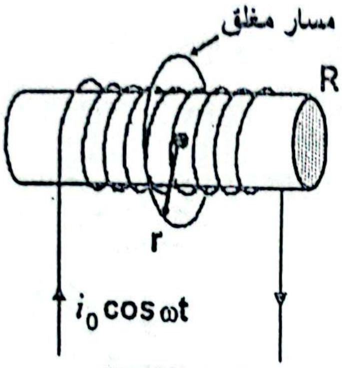
وقد أسقطت الإشارة السالبة من المعادلتين (10-16) و (10-17) إذ إننا معنيون بمقدار المجال E فقط. وتلاحظ مما تقدم أنَّ المجال الكهربائي E يتزايد بشكل خطي من صفر (في المركز) إلى $E = (R/2)(dB/dt)$ (عند الحافة)، ثم يتناقص عكسيا مع البعد عن المركز في المنطقة الواقعة خارج القطبين. وتكون خطوط المجال الكهربائي على شكل دوائر، كما هو مبين في الشكل (10-8 ب).

مثال (8-10)

ملف لولبي طويل نصف قطر مقطعه R ويحتوي على n لفة لكل وحدة طول. يحمل تياراً متغيراً مع الزمن يُعطى بالمعادلة $i = i_0 \cos\omega t$، حيثُ تُمثّل i_0 قيمة التيار العظمى وتُمثّل ω تردده الزاوي. أوجد المجال الكهربائي عند نقطة تبعد r عن محور الملف في الحالتين (أ) $r > R$ و (ب) $r < R$.

الحل:

(أ) نمرر بالنقطة المراد حساب المجال عندها مساراً دائرياً مغلقاً مركزه محور الملف، كما في الشكل (9-10). حيثُ يتضح من تماثل المسار أنّ مقدار المجال E ثابت عند جميع النقاط الواقعة عليه واتجاهه مماس لمحيط المسار. ويُعطى تدفق المجال المغناطيسي خلال هذا المسار بالمعادلة $\Phi_B = BA = B(\pi R^2)$، ولذلك نجد عند تطبيق المعادلة (15-10) أنّ:



الشكل (9-10)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\left[B\left(\pi R^2\right)\right]$$

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

وبما أنّ المجال المغناطيسي داخل ملف لولبي يُعطى بالمعادلة $B = \mu_0 n i$ وحيثُ أنّ $i = i_0 \cos\omega t$، فإنّ:

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 n i_0 \frac{d}{dt}(\cos\omega t)$$

$$= \pi R^2 \mu_0 n i_0 \sin\omega t$$

$$\therefore\ E = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \omega R^2}{2r}\right)\sin\omega t \quad ; \quad (r > R) \qquad (18\text{-}10)$$

وتلاحظ من هذه النتيجة أنّ المجال الكهربائي يتغير وفق اقتران جيبي مع مرور الزمن، إضافة إلى أنّ قيمته تتناقص بازدياد r.

(ب) عندما تكون $r < R$، أي عند نقطة واقعة داخل الملف، يكون تدفق المجال المغناطيسي $\Phi_B = B(\pi r^2)$. وباتباع خطوات مماثلة للخطوات المتبعة في الفرع السابق، نجد أنّ:

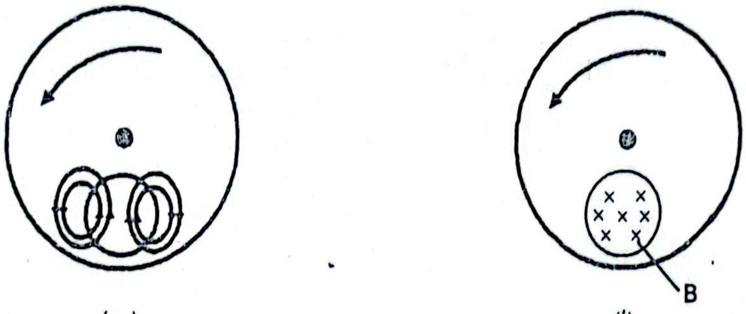
$$E\,(2\pi r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n i_0 \omega \sin\omega t$$

$$E = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \omega}{2}\right) r \sin\omega t \;\; ; \;\; (r < R) \qquad (19\text{-}10)$$

ويتضح من هذه النتيجة أنّ المجال الكهربائي داخل الملف اللولبي يتزايد بشكل خطي مع تزايد r ويتغير وفق اقتران جيبي مع مرور الزمن.

7-10 التيارات الدوّاميّة (Eddy Currents)

لا تسري التيارات التأثيريّة دائماً في مسارات محددة مسبقاً كما هي الحال في العرى والأسلاك. فمثلاً عند دوران قرص معدني بحيثُ يقطع جزء منه مجالاً مغناطيسياً، كما في الشكل (10-10 أ)، يتولد في هذا الجزء قوة دافعة كهربائية نتيجة استجابة الإلكترونات الحرة الموجودة فيه للمجال المغناطيسي وانسياقها باتجاه محدد. ويكون اتجاه التيار الاصطلاحي (المعاكس لاتجاه حركة الإلكترونات) إلى الأعلى في الجزء الواقع داخل المجال من القرص، كما يكون اتجاهه إلى الأسفل في الجزء الواقع خارج المجال، انظر الشكل (10-10 ب). ويطلق على التيارات المُتولدة داخل القرص اسم التيارات الدوامية. وتتولد هذه التيارات الدوامية داخل أي موصل متحرك خلال مجال مغناطيسي، كما تتولد هذه التيارات داخل أي موصل ساكن إذا تعرض لمجال مغناطيسي متغير.



الشكل (10-10)

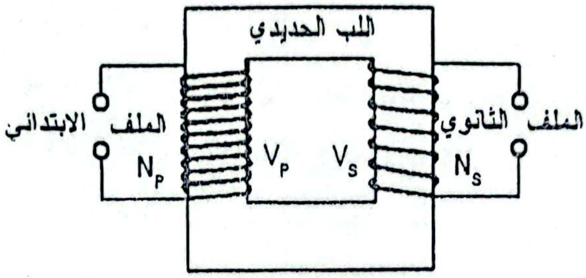
ويبذل المجال المغناطيسي قوة على التيارات الدوامية الناتجة في الموصل باتجاه مضاد لاتجاه الحركة، أي قوة معيقة للحركة (وذلك حسب قانون لنز). ولذلك يستفاد من التيارات الدوامية لكبح حركة الأجسام أحياناً كما هي الحال في القاطرات الكهربائية السريعة مثلاً. فلكي توقف القاطرة، يؤثر مجال كهرومغناطيسي على عجلات القاطرة المصنوعة من الفولاذ، فتعمل القوة المغناطيسية المؤثرة في التيارات الدوامية المُتولدة في العجلات على مقاومة الحركة وإيقاف القاطرة بالتالي. كما يُستفاد من ظاهرة التيّارات الدواميّة هذه في الغلفانومتر، حيثُ تقلل التيارات المُتولدة من تذبذب ملفه وتسهل بهذا أخذ القياسات.

من ناحية أخرى فإن التيارات الدوامية تُمثّل مشكلة تستوجب البحث عن حل للتخلص منها في الكثير من الحالات، ففي المحرك الكهربائي، وكذلك في المُولد، يضيع جزء من القدرة الكهربائية للتغلب على هذه التيارات. ولتقليل أثر التيارات الدوامية يصنع اللب الحديدي (الداخلي) للمحرك الكهربائي وما شابهه من أجهزة، عادة على شكل صفائح رقيقة يفصل بينها طبقات عازلة رقيقة. حيثُ تزيد الطبقات العازلة من مقاومة اللب وتقلل بذلك التيارات الدوامية، فتقل الطاقة الضائعة.

تتولد التيارات الدواميّة نتيجة لوجود جزء من موصل في مجال مغناطيسي. ويتسبب وجودها في إعاقة حركة الموصل.

8-10 المُحوِّلات (Transformers)

تُستخدم المُحوِّلات لنقل القدرة الكهربائية ولرفع أو خفض الجهد. ويتكون المُحوِّل من ملفين من السلك المعزول، يعرفان بالملف الابتدائي (primary coil) والملف الثانوي (secondary coil) ملفوفين على لُبٍّ من الحديد اللين. ويصنع لُب الملف الحديدي عادة من صفائح رقيقة من الحديد يفصل بينها طبقات عازلة لتقليل تأثيرات التيارات الدوامية. ويعتمد المُحوِّل في عمله على مبدأ قانون فارادي في الحث الكهرومغناطيسي، حيثُ يؤدي تغير تدفق المجال المغناطيسي الخاص بالملف الابتدائي عند تأثيره في الملف الثانوي إلى توليد قوة دافعة وتيار تأثيريين في الملف الثانوي. انظر الشكل (10-11).



الشكل (10-11)

ولزيادة كفاءة نقل التأثير الكهرومغناطيسي بين الملفين الابتدائي والثانوي، يُلَف الملفان على نفس اللب الحديدي، حيثُ يُحصر التدفق المغناطيسي كله (تقريبا) ضمن هذا اللب.

عندما يؤثر تيار متردد في ملف المُحوِّل الابتدائي، يُولِّد المجال المغناطيسي المتغير الناتج عنه في الملف الثانوي جهداً متردداً له نفس جهد الملف الابتدائي. وتعتمد قيمة الجهد الثانوي V_S (المُتولد في الملف الثانوي) على الجهد الابتدائي V_P (المسلط على الملف الابتدائي)، وعلى النسبة بين عدد لفات الملفين الابتدائي والثانوي. ويُمكن التعبير عن الجهد الثانوي أو القوة الدافعة الكهربائية المُتولِّدة في الملف الثانوي، بالمعادلة:

$$V_S = N_S \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (20\text{-}10)$$

حيثُ ترمز N_S لعدد لفات الملف الثانوي، وترمز $d\Phi_B/dt$ لمعدل تغير المجال المغناطيسي. كذلك يُمكن التعبير عن الجهد الابتدائي بالمعادلة:

$$V_P = N_P \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (21\text{-}10)$$

حيثُ ترمز N_P لعدد لفات الملف الابتدائي. وبقسمة المعادلة (10-20) على المعادلة (10-21) نجد أنَّ:

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P} \qquad (22\text{-}10)$$

وتبين معادلة المُحوِّل (transformer equation) هذه، العلاقة بين الجهدين الابتدائي والثانوي. فإذا كانت N_s أكبر من N_P يقال للمُحوِّل بأنه رافع للجهد (step-up)، وإذا كانت N_s أقل من N_P فيُقال للمُحوِّل بأنه خافض للجهد (step-down).

بالرغم من أنه يُمكن رفع قيمة الجهد أو خفضها، إلا إننا لا نحصل على شيء دون ثمن. فنحن نعلم من مبدأ حفظ الطاقة أنه لا يُمكن خلق شيء من العدم، ولذلك فإن زيادة الجهد الثانوي V_s يكون على حساب التيار الثانوي، حيثُ تستوجب مساواة القدرة الكهربائية الثانوية بالقدرة الكهربائية الابتدائية. أي أنّ:

$$V_P\, i_P = V_S\, i_S \qquad (23\text{-}10)$$

حيثُ يُمثّل i_P و i_s التيارين الابتدائي والثانوي على الترتيب. وتتحقق هذه المعادلة بالطبع إذا كانت كفاءة المُحوِّل 100%، أي إذا كان فقد القدرة فيه صفراً. ويُمكن عملياً الحصول على محولات تبلغ كفاءتها تقريبا 99%. أي أنّ قدرتها الثانوية تساوي 0.99 من قدرتها الابتدائية. ويتضح من المعادلة (23-10) أنّ زيادة قيمة V_s تتطلب خفض قيمة i_s بحيثُ يظل حاصل ضربهما ثابتاً ومساوياً للقدرة الكهربائية الابتدائية. وبالتعويض في المعادلة (22-10)، نجد أنّ:

$$\frac{i_S}{i_P} = \frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} \qquad (24\text{-}10)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أنّ المُحوِّل يعمل على التيار المتردد فقط. إذ أنّ التيار المستمر (أو المباشر) كتيار البطاريات مثلاً، ثابت المقدار والاتجاه، وبالتالي لا يولد مجالاً مغناطيسيا متغيرا، أي أنّ $d\Phi_B/dt = 0$ في هذه الحالة. وعليه فلا يتولد في الملف الثانوي جهد ولا تيار تأثيري.

مثال (9-10)

يستخدم مُحوِّل لخفض الجهد من 220 V إلى 6 V في تشغيل جهاز كهربائي. إذا كان عدد لفات الملف الثانوي للمُحوِّل 24 وكان الجهاز يسحب تياراً شدته 0.5 A من المُحوِّل، فأوجد: (أ) عدد لفات الملف الابتدائي. (ب) التيار المار في الملف الابتدائي. (ج) القدرة الكهربائية المحولة.

الحل:

(أ) باستخدام المعادلة (22-10) نجد أنّ:

$$N_P = N_S\, V_P/V_S$$
$$= 24 \times 220/6 = 880$$

أي أنّ عدد لفات الملف الابتدائي 880 لفة.

(ب) من المعادلة (24-10) نجد أنّ:

$i_P = i_S\, N_S/N_P$

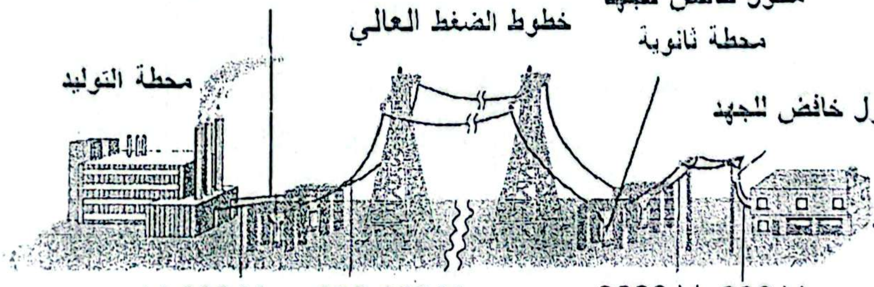
$= 0.5 \times 24/880 = 0.0136\ A = 13.6\ mA$

(جـ) يُمكن حساب القدرة المحولة باستخدام المعادلة (10-23) على النحو التالي:

$P = i_S\, V_S$

$= 0.5 \times 6 = 3\ W$

وللمُحوِّلات أهميتها الكبيرة في نقل الكهرباء بين محطات التوليد والمناطق التي تستهلك الكهرباء، حيثُ تكون المحطات بعيدة عن المناطق المأهولة بالسكان في معظم الأحيان. وعند نقل الطاقة الكهربائية بين المحطات والمستهلكين يضيع جزء من الطاقة دائما خلال خطوط النقل، ويزداد الجزء الضائع هذا بازدياد التيار الكهربائي المار في خطوط النقل، إذ أنَّ القدرة تتناسب مع مربع التيار. ولذلك يجب أن يكون تيار نقل القدرة صغيراً ما أمكن لتقليل ضياع القدرة في خطوط النقل، ويتحقق هذا باستخدام جهد عال لأنَّ حاصل ضرب التيار في الجهد يساوي مقداراً ثابتاً، كما في المعادلة (10-23). وهذا موضح في الشكل (10-12) كما سيتضح أيضا من خلال مناقشتنا للمثال (10-10).



الشكل (10-12)

يتكون المُحوِّل في تركيبته الأساسية من ملفين، يُسمَّى الأول الملف الابتدائي والثاني الملف الثانوي. ويُستفاد من الحث المتبادل بين الملفين لتوليد قوة دافعة تأثيريَّة.

تُستخدم المحوِّلات في نقل الطاقة الكهربائيَّة من منطقة إلى أخرى.

تُعطى العلاقة بين الجهدين الابتدائي والثانوي بما يُسمَّى معادلة المُحوِّل:

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}$$

حيثُ V_P و V_S هما الجهد الابتدائي والجهد الثانوي وN_P و N_S هما عدد لفَّات الملف الابتدائي والثانوي على الترتيب.

مثال (10-10)

تمد محطة توليد كهرباء قرية تبعد عنها 10 km بقدرة متوسط قيمتها 100 kW بواسطة خطوط نقل مقاومتها الكلية $0.4\ \Omega$. احسب القدرة الضائعة في خطوط النقل إذا كان الجهد المنقول: (أ) 220V (ب) 22000V.

الحل:

(أ) إذا كانت القدرة الخارجة من المحطة 100 kW، وكان الجهد المستخدم في النقل 220 V، فإنّ التيار الكهربائي الكلي يكون:

$$i = \frac{100\times10^3\ \text{W}}{220\ \text{V}} = 454.55\ \text{A}$$

وعليه فإن القدرة المفقودة في خطوط النقل تكون:

$$P = i^2 R = (454.55\ \text{A})^2 \times (0.4\ \Omega)$$
$$= 82646\ \text{W} \cong 82.65\ \text{kW}$$

أي أنّ القدرة المفقودة تبلغ أكثر من 80% من القدرة المراد نقلها.

(ب) وعندما يستخدم الجهد 22000 V في نقل القدرة يكوّن التيار الكلي:

$$i = \frac{100\times10^3\ \text{W}}{22\times10^3\ \text{V}} = 4.55\ \text{A}$$

وعليه تكون القدرة المفقودة في خطوط النقل في هذه الحالة:

$$P = i^2 R = (4.55\ \text{A})^2 \times (0.4\ \Omega)$$
$$= 8.28\ \text{W} \cong 0.0083\ \text{kW}$$

وهذا أقل من 0.01% من القدرة المراد نقلها عبر الخطوط.

يتضح من المثال (10-10) أنه كلما ازداد جهد النقل قل التيار المار به، وبالتالي يقل فقد القدرة خلاله. وهذا هو السبب في استخدام خطوط الجهد (أو الضغط) العالي في شبكات الكهرباء والذي يبلغ في بعض الحالات 700 kV. وفي مثل الحالة تستخدم محولات رافعة للجهد لربط محطة التوليد بخطوط النقل، حيثُ تقوم بتحويل الجهد الناتج في المحطة إلى جهد النقل العالي، ثم تستخدم محولات خافضة للجهد لتحويل الجهد عند المدينة أو القرية المراد استخدامه فيها من قيمة عالية إلى قيمة متوسطة (حوالي 2000 V في شوارع المدن الكبيرة)، ثم يُحوّل بواسطة محولات فرعية خافضة للجهد خاصة بالأحياء من هذه القيمة إلى الجهد المستخدم في بيوتنا ومصانعنا (حوالي 220 V في بلادنا). وبذلك يتم نقل القدرة بكفاءة ممتازة من محطة التوليد إلى المستهلك، أنظر الشكل (10-12).

9-10 معادلات ماكسويل (Maxwell's Equations):

نختم هذا الفصل بمناقشة أربع معادلات أساسية لجميع الظواهر الكهربائية والمغناطيسية، تعرف بمعادلات ماكسويل نسبة إلى جيمس ماكسويل (J. Maxwell) وتلعب هذه المعادلات دورا هاما في الكهرومغناطيسية مماثلا للدور الذي تلعبه قوانين نيوتن في الميكانيكا. وقد مرت هذه المعادلات معنا خلال مناقشتنا لمواضيع معينة في دراستنا السابقة خلال صفحات هذا الكتاب.

كما أنها ستمر معك ثانية في حالة دراستك مستقبلاً للنظرية الكهرومغناطيسية، وللأمواج الكهرومغناطيسية، إذ أنها تتنبأ بوجود الأمواج الكهرومغناطيسية (التي هي بمثابة أنماط مسافرة للمجالين الكهربائي والمغناطيسي)، وتتنبأ أيضا بأنَّ سرعة هذه الأمواج هي نفس سرعة الضوء في الفراغ أي $c = 1/\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0} \approx 3\times10^8 m/s$. كما أنَّ معادلات ماكسويل تثبت بأنَّ الأمواج الكهرومغناطيسية تنبعث من الشحنات المتسارعة (accelerated charges).

نستعرض في ما يلي معادلات ماكسويل الأربع مطبقة في حالة الفراغ، أي في حالة عدم وجود أية مادة. وهذه المعادلات هي:

(قانون غاوس في الكهرباء) ؛
$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (25\text{-}10)$$

(قانون غاوس في المغناطيسية) ؛
$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{A} = 0 \qquad (26\text{-}10)$$

(قانون فارادي) ؛
$$\oint \mathbf{E}.d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (27\text{-}10)$$

(قانون أمبير وماكسويل) ؛
$$\oint \mathbf{B}.d\boldsymbol{l} = \mu_0\, i + \varepsilon_0\,\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (28\text{-}10)$$

إن معادلة ماكسويل الأولى (25-10)، هي نفس قانون غاوس الذي ينص على أنَّ التدفق الكلي للمجال الكهربائي خلال أي سطح مغلق يساوي الشحنة المُحصّلة داخله مقسومة على ε_0. ويربط هذا القانون بين المجال الكهربائي وتوزيع الشحنات، حيثُ تنبعث خطوط المجال من الشحنات الموجبة وتنتهي في الشحنات السالبة. ويكافئ قانون غاوس، كما هو معلوم لديك، قانون كولوم الذي ثبتت صحته تجريباً.

وتنص معادلة ماكسويل الثانية، المعادلة (26-10)، التي يُمكن اعتبارها تطبيقاً لقانون غاوس في المغناطيسية، على أنَّ التدفق الكلي للمجال المغناطيسي خلال أي سطح مغلق يساوي صفراً. أي أنَّ عدد خطوط المجال المغناطيسي التي تدخل أي حيز مغلق يساوي عدد الخطوط التي تخرج منه. وهذا يعني أنَّ خطوط المجال المغناطيسي لا تستطيع أن تبدأ أو أن تنتهي عند أية نقطة، ولو فعلت ذلك لدلَّ هذا بالتأكيد على وجود أقطاب مغناطيسية مفردة عند تلك النقطة. وتثبت حقيقة عدم وجود أقطاب مغناطيسية

مفردة صحة ما جاء في المعادلة الثانية.

أما معادلة ماكسويل الثالثة، المعادلة (10-27)، فهي ليست سوى قانون فارادي في الحث الكهرومغناطيسي التي تصف العلاقة بين المجال الكهربائي وتدفق المجال المغناطيسي المتغير مع الزمن. ويقضي هذا القانون بأنّ التكامل الخطي للمجال الكهربائي حول أي مسار مغلق (الذي يساوي القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية) يساوي معدل تغير التدفق المغناطيسي خلال أي سطح محاط بالمسار. ومن النتائج المبنية على قانون فارادي هذا هو التيار المُتولد بالتأثير في عروة موضوعة داخل مجال مغناطيسي متغير.

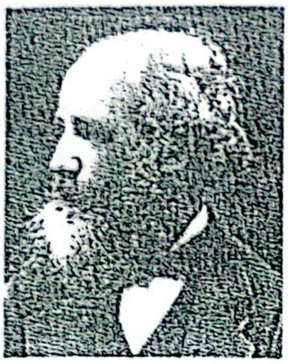
وأخيرا، تُمثّل المعادلة الرابعة لماكسويل، المعادلة (10-28)، الصورة العامة لقانون أمبير الذي يصف العلاقة بين المجالين الكهربائي والمغناطيسي والتيارات الكهربائية. حيثُ يقضي بأنّ التكامل الخطي للمجال المغناطيسي حول أي مسار مغلق يساوي مجموع تيار التوصيل المُحصّل خلال المسار ومعدل تغير تدفق المجال الكهربائي خلال أي سطح محاط بالمسار.

وإذا ما عُرف المجالان الكهربائي والمغناطيسي عند أية نقطة في الفراغ فإن القوة المؤثرة على شحنة q تصبح معلومة، وتُعطى بالمعادلة:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,v \times \mathbf{B} \qquad (29\text{-}10)$$

وهذه هي قوة لورنز. وتعطي معادلات ماكسويل الأربع مع قانون القوة هذا، [معادلة (10-29)] وصفا كاملا لجميع التأثيرات الكهرومغناطيسية. وتلاحظ عند تفحص معادلات ماكسويل أنّ المعادلتين (10-25) (10-26) متماثلتان باستثناء غياب حد أحادي القطب المغناطيسي عن المعادلة (10-26)، كما تلاحظ تماثل المعادلتين (10-27) و (10-28) في كون التكاملين الخطين للمجالين **E** و **B** حول مسار مغلق يرتبطان مع معدل تغير التدفق المغناطيسي ومعدل تغير التدفق الكهربائي على التوالي.

وُلِد ماكسويل في العام 1831 في مدينة إدنبره (Edinburgh)، في سكوتلندا. لم يتعلم ماكسويل في المدرسة وإنّما في البيت. وعندما أصبح في الثالثة عشرة دخل أكاديميّة إدنبره وكان منعزلاً عن أقرانه يدرس ويبحث في الرياضيات. وكتب في سن الرابعة عشرة من عمره مقالة علميّة عن الأشكال البيضاويّة. في العام 1850 انتقل ماكسويل إلى جامعة ترينتي في دبلن (أيرلندا) حيثُ حصل على منحة دراسيّة وبعد ثلاث سنوات حاز على الشهادة الجامعيّة الأولى في الرياضيّات. وفي عامي 1855 و 1856 أرسل ماكسويل مقالتين علميتين إلى جمعية كمبريدج للفلسفة عن أعمال فارادي يبين فيها بمعادلات بسيطة سلوك المجالات الكهربائية والمغناطيسيّة وارتباطها ببعضها. استقر الوضع بماكسويل كأستاذ للعلوم الطبيعيّة في كلية الملك في لندن في عام 1860. وخلال السنوات الست التي قضاها هناك كرّس وقته للبحث على الرغم من أعبائه الأكاديميّة وكان أهم إنجازاته حساب سرعة الأمواج الكهرومغناطيسيّة والتي وجدها تساوي سرعة الضوء في الفراغ. وكان استنتاجه أنّ الضوء هو أمواج كهرومغناطيسيّة. وفي عام 1871 قبل ماكسويل بوظيفة أستاذ في الفيزياء في جامعة كمبريدج العريقة ليحتل كرسي الأستاذية الذي سُمّي باسم كافنديش (Cavendish) الفيزيائي البريطاني المعروف. وفي عام 1873، نشر ماكسويل كتابه *الكهرباء والمغناطيسيّة* وفيه وضع معادلاته الأربع المشهورة والتي تُعَدّ بحق أهم الإنجازات العلميّة في القرن التاسع عشر. وتوفي ماكسويل عام 1979 في ريعان شبابه (كان عمره 46 سنة) مخلّفا للبشريّة إطاراً رياضيّاً يُفسّر الظواهر الكهرومغناطيسيّة ممّا فتح الباب منذ ذلك الوقت أمام التقدم التقني الهائل في شتّى مناحي الحياة.



بتصرف عن:

MacTutor History of Mathematics

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Maxwell.html

ملخص الفصل العاشر

1. عند تغير التدفق المغناطيسي خلال ملف تتولد قوة دافعة كهربائية، وتسمّى القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة. ويسمّى التيار المُتولد في الملف بالتيار التأثيري.

2. الحث المتبادل بين ملفين هو الطريقة الأخرى لإنتاج تيارات تأثيريّة.

3. الحث الذاتي هو تولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية في دارة مغلقة.

4. **قانون فارادي:** القوة الدافعة التأثيريّة ε الناتجة عن تحريك مجال مغناطيسي داخل ملف تساوي معدل التغير الزمني في تدفق المجال المغناطيسي.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int B.dA$$

5. ينصُ **قانون لنز** على أنّ "اتجاه التيار التأثيري يكون بحيثُ يكون اتجاه المجال المغناطيسي التأثيري الناتج عنه مُعاكساً للتغير في التدفق المغناطيسي الأصلي".

وتُمثّل الإشارة السالبة في قانون فارادي قانون لنز.

6. المُولّد الكهربائي جهاز يُستخدم لتوليد قوة دافعة كهربائيّة باستخدام مبدأ الحث الكهرومغناطيسي. الفكرة هي في استخدام ملف يدْور في مجال مغناطيسي.

تتحول الطاقة الميكانيكيّة المستخدمة في تدوير (أو تحريك) الملف في المجال المغناطيسي إلى طاقة كهربائيّة.

7. يُولّد المجال المغناطيسي المتغير مجالاً كهربائيًا يُعطى بالعلاقة: $\oint E.dl = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

8. يختلف المجال الكهربائي التأثيري **E** في طبيعته عن المجال الكهربائي الناتج عن شحنة ساكنة

9. في حين أنّ القوى الناتجة عن شحنات ساكنة قوى محافظة فإنّ القوى الناتجة عن المجالات المغناطيسية المتغيرة ليست قوى محافظة. ولذلك لا نستطيع أن نعرف طاقة وضع في حالة المجالات غير الساكنة.

10. يتكون المُحوّل في تركيبته الأساسية من ملفيْن، يُسمّى الأول الملف الابتدائي والثاني الملف الثانوي. ويُستفاد من الحث المتبادل بين الملفيْن لتوليد قوة دافعة تأثيريّة.

المحوّلات نوعان: رافع للجهد وخافض للجهد وتُستخدم في نقل الطاقة الكهربائيّة من منطقة إلى أخرى.

11. **تُمثّل معادلات ماكسويل الأربع، بالإضافة إلى قانون لورنز،** إطارا رياضيًا شاملاً لتفسير جميع الظواهر الكهرومغناطيسيّة.

1: عند إدخال ملف في مجال مغناطيسي بسرعة معينة v فإنَّ القوة الدافعة التأثيريَّة الناتجة:

أ) تقل بازدياد v ب) تزداد بازدياد v

ج) تتغير بشكل أسي بازدياد v د) تتغير بشكل جيبي بازدياد v

2: وُضع ملف عدد لفاته $N = 100$ ومساحة مقطعه $0.02\ m^2$ في منطقة مجال مغناطيسيّ يُوازي محوره ويتغير مع الزمن حسب العلاقة: $B(t) = 2 + 3\ t^2$ حيثُ t بالثانية و B بالتسلا. إنَّ مقدار القوة الدافعة التأثيريَّة المُتولدة في الملف (بالفولت) في اللحظة $t = 3\ s$ يُساوي:

أ) 36 V ب) 48 V ج) 60 V د) 72 V

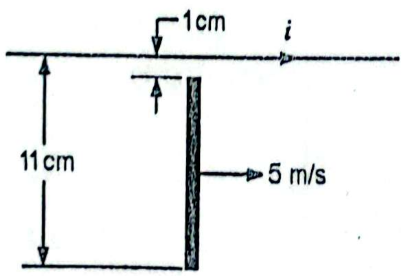
3: استخدم ملف دائري مساحة مقطعه $0.03\ m^2$ وعدد لفاته 1000 لقياس مجال مغناطيسي منتظم ومجهول، فدور في المجال بسرعة $5\ rad\ s^{-1}$ ولوحظ أنَّ أكبر قيمة للقوة الدافعة الكهربائية المُتولدة فيه كانت 1.2 V. إنَّ شده المجال المغناطيسي تساوي:

أ) 2 mT ب) 4 mT ج) 6 mT د) 8 mT

4: في السؤال السابق لو كانت شدة المجال المغناطيسي الناتج تساوي 20 mT فانَّ سرعة الدوران، بوحدة $rad\ s^{-1}$، يجب أنْ تُصبح مساوية لـ:

أ) 1.0 ب) 1.5 ج) 2.0 د) 2.5

5: يتحرك سلك مستقيم طوله 10 cm بسرعة 5 m/s باتجاه موازٍ لسلك طويل يحمل تياراً شدته i، كما في الشكل المجاور. إذ علمت أنَّ حافة السلك المتحرك القريبة من السلك الطويل تبعد مسافة 1 cm عنه وأنَّ فـرق



الجهد المُتولِّد بين طرفي السلك المتحرك يساوي $1.2\ \mu V$ فإنَّ شدة التيار i تساوي:

أ) 0.25 A ب) 0.50 A ج) 0.75 A د) 1.00 A

6: ملف لولبي طويل نصف قطر مقطعه 6 cm ويحتوي على 1000 لفة لكل وحدة طول، يحمل تياراً متغيراً مع الزمن يُعطى بالمعادلة $i = i_0 \cos\omega t$، حيثُ i_0 قيمة التيار العظمى وتساوي 500 mA و $\omega = 10\ rad\ s^{-1}$ تردد التيار الزاوي. إنَّ أكبر قيمة لشدة المجال الكهربائي، بوحدة $10^{-6}\ V/m$، عند نقطة تبعد 3 cm عن محور الملف تساوي تقريباً:

ملاحظة: أنظر المثال (10-8).

أ) 47.1 ب) 62.8 ج) 78.5 د) 94.2

4-10

7: يخضع محوّل عدد لفاتْ ملفه الابتدائي 200 وعدد لفات ملفه الثانوي 80 إلى جهد متردد قدره 220 V. إنّ جهد الملف الثانوي يساوي:

أ) 88 V وهذا المحوّل رافع للجهد ب) 88 V وهذا المحوّل خافض للجهد

ج) 550 V وهذا المحوّل رافع للجهد د) 550 V وهذا المحوّل رافع للجهد

8: في السؤال السابق إذا كانت شدة التيار في الملف الثانوي تساوي 50 mA فإنّ شدة التيار المار في الملف الابتدائي تُساوي:

أ) 50 mA ب) 25 mA ج) 20 mA د) 10 mA

9: يُعبِّر قانون غاوس في المغناطيسية $\oint \mathbf{B} . d\mathbf{A} = 0$ عن حقيقة أنّ:

أ) الأحاقطبي المغناطيسي غير موجود.

ب) تدفق المجال المغناطيسي يعتمد على مصدره.

ج) تدفق المجال المغناطيسي الناتج عن ثناقطبي مغناطيسي في أية نقطة في الفراغ ثابت.

د) تدفق أي مجال مغناطيسي خلال أي سطح يساوي دائماً صفراً.

10: تُعبِّر معادلات ماكسويل عن حقيقة:

أ) وجوب التمييز بين الأثر الكهربائي والأثر المغناطيسي للشحنات الكهربائية.

ب) وجود الأثر الكهربائي والمغناطيسي للشحنات الكهربائية في آن واحد.

ج) أنّ الأثر الكهربائي والمغناطيسي للشحنات الكهربائية لا يظهران معاً.

د) أنّ الكهرباء والمغناطيسية ظاهرتان مستقلتان تماماً الواحدة عن الأخرى.

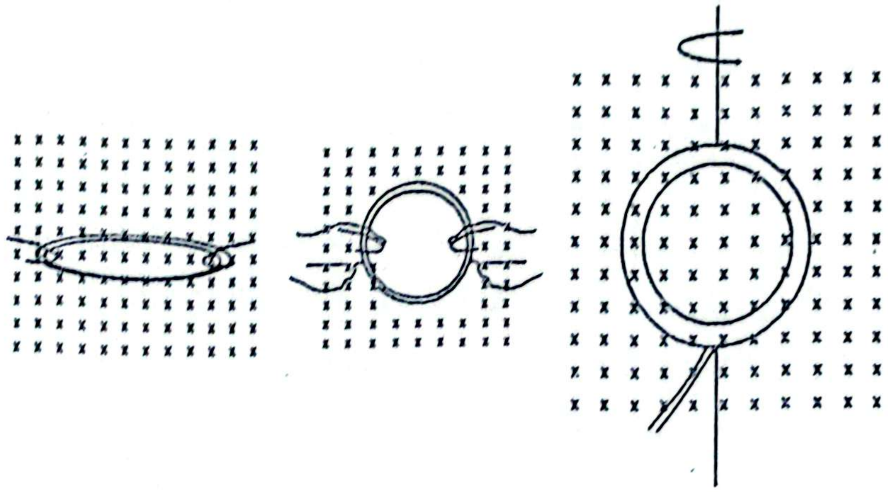
مسائل

1-10 يتغير التدفق المغناطيسي خلال ملف يحتوي على 12 لفة من -6.0 Wb إلى +6.0 Wb خلال 0.2 s. ما متوسط القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولّدة في الملف؟

2-10 يؤثر مجال مغناطيسي باتجاه عمودي على سطح عروة دائرية نصف قطرها 15 cm فتتغير قيمته من 0.4 T إلى 0.8 T خلال 80 ms. احسب متوسط القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولّدة في العروة.

3-10 ملف مكون من 50 لفة مساحة سطحه $0.2\ m^2$ ومقاومته $0.6\ \Omega$، موضوع في مجال مغناطيسي منتظم B يؤثر باتجاه عمودي على مستواه، إذا كانت قيمة المجال B تتغير بمرور الزمن على النحو: $B = 5t^2 + 3t - 2$، حيث B بالتسلا و t بالثواني فأوجد: (أ) القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولّدة في الملف عند اللحظة $t = 4\ s$. (ب) التيار

4-10 يؤثر مجال مغناطيسي شدته $B = 0.2\ T$ باتجاه عمودي على ملف مساحة سطحه $A = 10^{-2}\ m^2$ وعدد لفاته $N = 100$ كما في الشكل (10-13 أ). (أ) إذا دوّر الملف بحيثُ أصبح المجال موازياً لسطحه خلال زمن $0.2\ s$، فما القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولدة في الملف؟ (ب) إذا حرك الملف في الشكل (10-13 أ) بعيداً عن منطقة المجال واستغرق إخراجه من المجال $0.2\ s$ فما مقدار القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولدة في الملف؟ (جـ) إذا سحب طرفا الملف السابق خلال زمن $0.2\ s$ كما في الشكل (10-13 جـ) وأصبحت مساحته $0.1\ A$، فما مقدار القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولدة في الملف؟ (د) أي الحالات السابقة تُعَد عملية لتوليد القوة الدافعة الكهربائية؟



(جـ) (ب) (أ)

الشكل (10-13)

5-10 عروة مرنة من مادة موصلة تتغير مساحة سطحها وفقاً للعلاقة $A = 5\times10^{-3}/(5+t)$ حيثُ t بالثواني و A بالمتر المربع، إذا كانت العروة موضوعة في مجال مغناطيسي منتظم عمودي على مستواها شدته $0.2\ T$، فما القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولدة في العروة عنداللحظة $t = 2\ s$ ؟

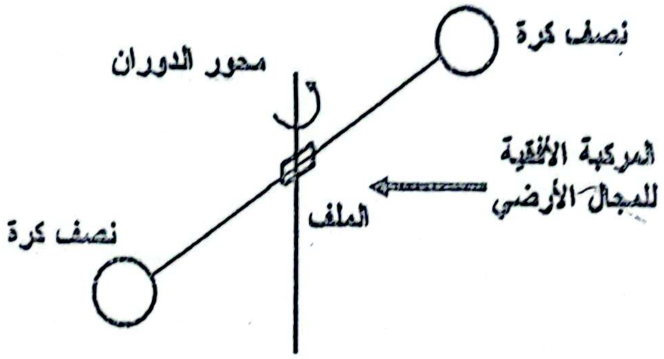
6-10 حلقة دائرية نصف قطرها $15\ cm$ ومقاومتها $0.012\ \Omega$ ما كمية الشحنات الكلية المارة في الحلقة عند تدويرها من وضع يكون مستواها عمودياً على مجال مغناطيسي منتظم شدته $4.0\ T$ إلى وضع يصبح فيه مستواها موازياً للمجال؟

7-10 وضعت عروة مساحتها A في مجال مغناطيسي B قيمته متغيرة مع الزمن وعمودي على مستواها، يُعطى مقداره بالمعادلة $B = B_0 e^{-t/a}$، حيثُ B_0 و a ثابتان و t بالثواني. (أ) اثبت أنّ القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة المُتولدة في العروة تُعطى المعادلة

$B_0 = 0.2T$ و $A = 0.05\ m^2$. (جـ) استخدم القيم المعطاة في الفرع السابق واحسب القيمة العظمى للقوة الدافعة الكهربائية ε؟

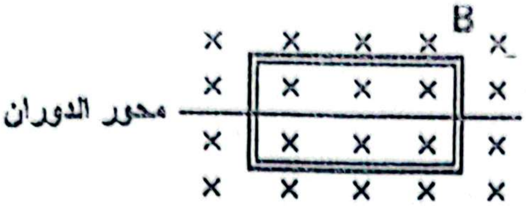
8-10 استُخدم ملف دائري نصف قطره 1 cm وعدد لفاته 80 لقياس مجال مغناطيسي مجهول، فدُوِّر في المجال بسرعة 500 دورة في الدقيقة ولوحظ أنَّ أكبر قيمة للقوة الدافعة الكهربائية المُتولِّدة فيه كانت 1.2 V. ما شدة المجال المغناطيسي؟ وهل يُمكن الاستفادة من هذه الطريقة لتحديد اتجاه المجال؟ علل إجابتك.

9-10 يُستخدم جهاز الأنيموميتر (anemometer) لقياس سرعة الريح. ويتكون الجهاز من قضيب خفيف مثبت في نهايته نصفا كرة صغيرة بشكل متعاكس، ومثبت في وسطه ملف مستواه بالاتجاه الرأسي، ويدور حول محور رأسي كما في الشكل (10-14). وعند دوران الجهاز تحت تأثير الريح وتغير تدفق المجال المغناطيسي الأرضي خلال ملفه، يتولد في الملف قوة دافعة كهربائية تأثيرية تتناسب مع سرعة الدوران التي تتناسب بدورها مع سرعة الريح. إذا كان طول قضيب الأنيموميتر 60 cm ومساحة ملفه $0.01\ m^2$، وعدد لفاته 200، وقيمة المركبة الأفقية للمجال المغناطيسي الأرضي $20\ \mu T$، فما سرعة الريح عندما تكون القوة الدافعة الكهربائية العظمى المُتولِّدة في الملف 2 mV؟



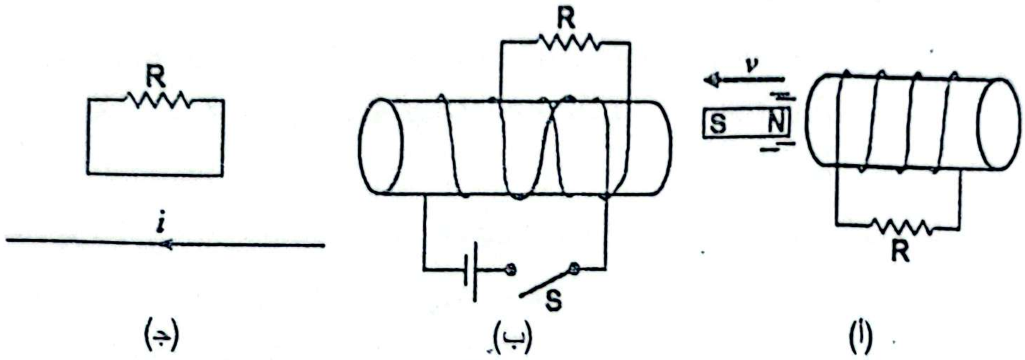
الشكل (10-14)

10-10 ملف مستطيل الشكل طوله 25 cm وعرضه 15 cm، يحتوي على 400 لفة، يدور حول محور تماثله في مجال مغناطيسي منتظم شدته متعامد مع محور دورانه، كما في الشكل (10-15). إذا علمت أنَّ الملف يكمل 2000 دورة في الدقيقة، فأوجد القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة المُتولِّدة في الملف عندما يصنع مستوى الملف مع اتجاه المجال زاوية قدرها: (أ) 90°، (ب) 80°، (جـ) 120°.



الشكل (15-10)

11-10 استخدم قانون لنز لإيجاد اتجاه التيار الكهربائي التأثيري المار في المقاومة R: (أ) عند تحريك المغناطيس نحو اليسار في الشكل (16-10 أ). (ب) عند إغلاق المفتاح S في الشكل (16-10ب). (ج) عند تناقص التيار i في الشكل (16-10 ج) بسرعة إلى الصفر.



الشكل (16-10)

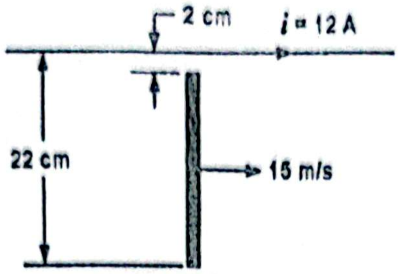
12-10 تطير طائرة البعد بين جناحيها 50 m بسرعة 200 m/s أفقيا باتجاه الشمال. إذا علمت أنَّ مركبة المجال المغناطيسي الرأسية تساوي 12 μT، (أ) فما فرق الجهد التقريبي المُتولّد بين طرفي جناحي الطائرة؟ (ب) ماذا يحدث إذا غيرت الطائرة اتجاه حركتها فأصبحت تطير باتجاه الشرق؟

13-10 سلك موصل ومستقيم طوله 1 m ويتحرك بسرعة 2 m/s باتجاه عمودي على مجال مغناطيسي منتظم شدته 0.5 T. (أ) ما فرق الجهد التأثيري المتولّد بين طرفيه؟ (ب) إذا تغير اتجاه حركة الموصل بحيثُ أصبح يصنع $30°$ مع اتجاه المجال، فما فرق الجهد التأثيري؟

14-10 يسقط قضيب معدني طوله 2 m من السكون تحت تأثير الجذب الأرضي بحيثُ يظل طوله موازيا للأفق ومتعامدا مع مركبة المجال المغناطيسي الأرضي الأفقية، إذا علمت أنَّ مركبة المجال المغناطيسي الأفقية تساوي 2.3×10^{-5} T فما فرق الجهد المُتولّد بين طرفي القضيب عند سقوطه مسافة 20 m؟

15-10 يتحرك سلك مستقيم طوله 20 cm بسرعة 15 m/s باتجاه مواز لسلك طويل يحمل تيارا شدته 12A، كما في الشكل (17-10). إذ علمت أنَّ حافة السلك المتحرك القريبة من السلك

الطويل تبعد مسافة 2cm عنه، فما فرق الجهد المتولد بين طرفي السلك المتحرك؟ أي الطرفين يكون جهده أعلى من الآخر؟

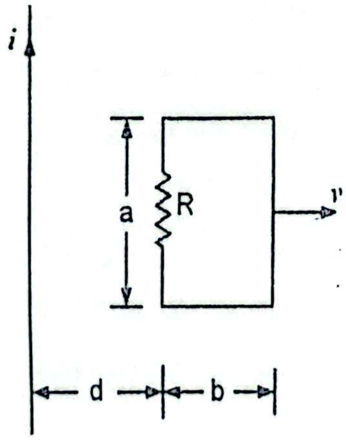


الشكل (10-17)

16-10 يدور قرص معدني نصف قطره R بسرعة زاوية ω حول محور عمودي على سطحه مار بمركزه في مجال مغناطيسي منتظم B مواز للمحور. (أ) أثبت أنّ فرق الجهد التأثيري المُتولد بين مركز القرص وحافته يساوي $B/2\ R^2\ \omega$. (ب) إذا كانت $\omega = 100$ rad/s و$B = 0.5$ T و $R = 12$ cm، فما قيمة فرق الجهد بين مركز القرص وحافته؟

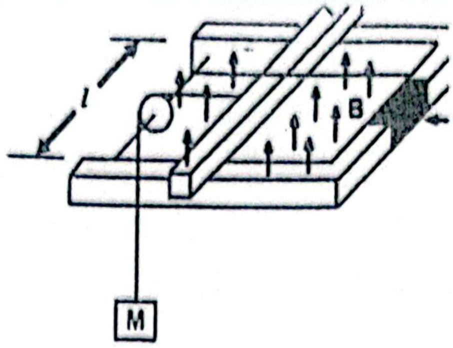
17-10 يدور مُولِّد بسيط مكون من عُرى مربعة طول ضلعها 6 cm، بسرعة 1200 دورة في الدقيقة في مجال مغناطيسي منتظم شدته 0.4 T، إذا كانت القيمة العظمى للقوة الدافعة الكهربائية المُتولدة فيه 12 V فما عدد عُرى ملف المُولِّد؟

18-10 عروة مستطيلة طولها a وعرضها b تتحرك بسرعة ثابتة v بعيداً عن سلك طويل واقع في مستواها، ويحمل تياراً i، كما في الشكل (10-18). إذا كانت مقاومة العروة R، فأوجد قيمة التيار التأثيري المُتولد في العروة عندما يبعد جانبها القريب عن السلك مسافة d.

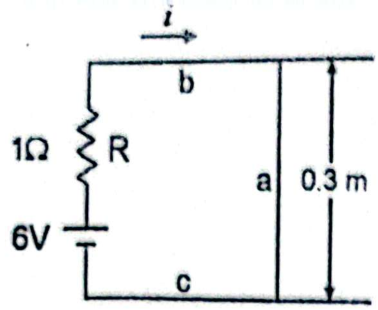


الشكل (10-18)

19-10 قضيب كتلته m قابل للانزلاق بدون احتكاك على موصلين متوازيين، البعد بينهما l ومتصل طرفاهما الأيمنين معاً بواسطة مقاومة R، وموضوعين في منطقة مجال مغناطيسي منتظم B متعامد مع مستواهما، كما في الشكل (10-19). ربطت كتلة M بالقضيب بواسطة خيط خفيف يمر حول بكرة، فبدأ القضيب بالانزلاق في اللحظة $t = 0$ أوجد سرعة القضيب بدلالة الزمن t.



الشكل (10-19)



الشكل (10-20)

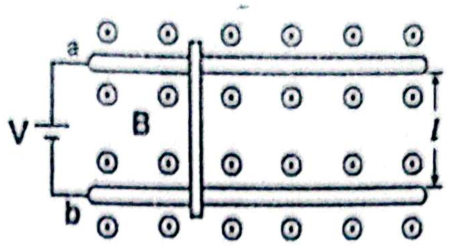
20-10 في الدارة المبينة في الشكل (10-20) يستطيع السلك a الانزلاق بدون احتكاك على السلكين b و c. إذا وُضعت الدارة في مجال مغناطيسي منتظم شدته 0.5 T بحيث كان اتجاهه عمودياً على مستواها إلى الداخل فبدأ السلك بالانزلاق إلى اليمين تحت تأثير القوة المغناطيسية ولزم التأثير عليه بقوة معاكسة قدرها 0.25 N لجعل انزلاقه بسرعة ثابتة. جد: (أ) شدة التيار المار في الدارة. (ب) فرق الجهد بين طرفي المقاومة R. (ج) القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة المُتولدة في السلك المنزلق. (د) سرعة انزلاق السلك. (هـ) القدرة الميكانيكية الناتجة عن انزلاق السلك.

21-10 قضيب موصل كتلته m ومقاومته R موضوع على سلكين أملسين متوازيين البعد بينهما l ويقعان في مجال مغناطيسي منتظم B عمودي على مستواهما، كما في الشكل (10-21). وُصل مصدر فرق جهد V بين النقطتين a و b في اللحظة $t = 0$. (أ) ما سرعة انزلاق القضيب بدلالة الزمن؟ (ب) هل تستمر سرعة القضيب بالتغير مع مرور الزمن، ولماذا؟

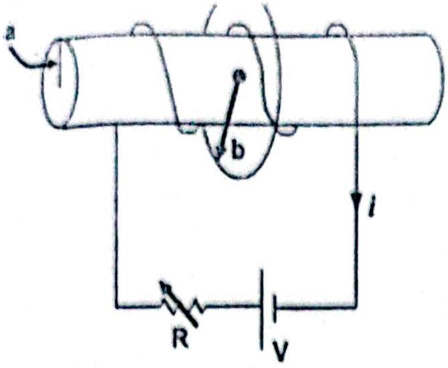
22-10 ملف لولبي طوله l، وعدد لفاته N ونصف قطره a، يتحد في المحور مع عروة دائرية نصف قطرها b، كما في الشكل (10-22). يُمكن تغيير التيار i المار في الملف اللولبي بواسطة المقاومة المتغيرة R. إذا تغير التيار i من 6 A إلى 1 A خلال زمن 1.5 ms وكانت $a = 4$ cm و $b = 20$ cm و $l = 1$m و $N = 3$ فأوجد القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة المُتولدة في العروة.

23-10 ما مقدار المجال الكهربائي عند أية نقطة على القرص الدوار في المسألة (10-16)؟ وما اتجاهه؟

24-10 يتغير مجال مغناطيسي B عمودي على مستوى الورقة إلى الداخل، خلال منطقة دائرية نصف قطرها $R = 8$ cm على النحو $B = (0.2t^2 + 0.3)$ T، حيث t بالثواني. ما مقدار المجال الكهربائي المُتولد عند نقطة مثل P_1 تبعد مسافة $r_1 = 5$ cm عن مركز المنطقة في اللحظة $t = 2$ s؟ وما اتجاهه؟ انظر الشكل (10-23).



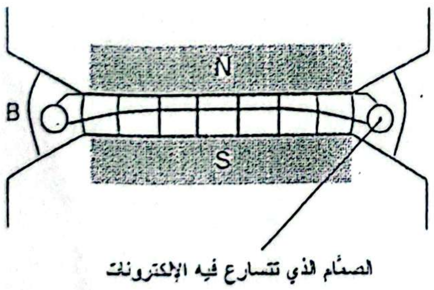
الشكل (10-21)



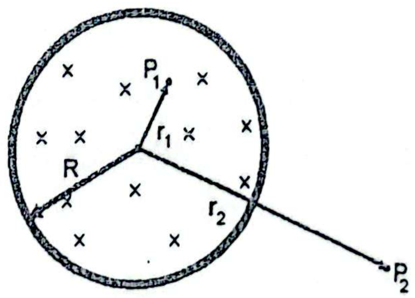
الشكل (10-22)

25-10 في المسألة السابقة، المسألة 10-24 إذا كانت $B=(t^2 -3t^2+ 0.05)T$ فأوجد القوة المؤثرة على إلكترون موجود عند النقطة P_2، التي تبعد عن مركز المنطقة مسافة $r_2 = 10cm$، في اللحظة $t = 3\ s$ أوجد اللحظة الزمنية التي تكون عندها القوة تساوي صفراً.

26-10 البيتاترون (Betatron) من الأجهزة التي شاع استعمالها في الماضي لتسريع الإلكترونات. يحتوي هذا الجهاز على صمام إلكتروني حلقي (circular) مفرغ من الهواء موضوع في مجال مغناطيسي B كما في الشكل (10-24). تدخل فيه الإلكترونات المراد تسريعها وزيادة طاقتها الحركية، حيثُ يعمل المجال المغناطيسي على حفظ الإلكترونات في مدارات دائرية داخل الصمام إضافة إلى تسريعه لها نتيجة تغيير مقداره. (أ) فسِّر كيف يتم تسريع الإلكترونات عندما تتغير قيمة المجال المغناطيسي. (ب) في أي اتجاه تتسارع الإلكترونات داخل البيتاترون. (جـ) هل يجب أن تتزايد قيمة المجال أم تتناقص لكي تسرع الإلكترونات؟



الشكل (10-24)



الشكل (10-23)

27-10 مُحولّ عدد لفات ملفه الابتدائي 255 وعدد لفات ملفه الثانوي 85 ما نوع هذا المُحولّ؟ إذا سُلِّط على ملفه الابتدائي جهد متردد قدره 220 V فما جهد ملفه الثانوي على افتراض أنَّ كفاءة المُحولّ 98% ؟

28-10 مُحولّ يرفع جهداً متردداً قدره 30 V إلى 220 V ما نسبة التيار الثانوي إلى التيار الابتدائي على افتراض أنَّ كفاءة المُحولّ 96% ؟

29-10 يحتاج مصباح نيون إلى 12 V لكي يضيء. (أ) كم يجب أن تكون نسبة عدد لفات ملفه الابتدائي إلى لفات ملفه الثانوي عند استخدام جهد 220 V لتشغيله؟ (ب) كم يكون الجهد إذا وقع خطأ في توصيل المُحوِّل فوصل ملفه الابتدائي بدل ملفه الثانوي وملفه الثانوي بدل الابتدائي؟

30-10 يحمل خطا نقل جهداً قدره 18 kV من محطة التوليد إلى مصنع يبعد 18 km عن محطة التوليد. إذا علمت أنَّ مقاومة كل من خطي النقل 0.4 Ω وأنهما يحملان تياراً شدته 600 A فأوجد: (أ) الجهد الكهربائي الواصل لمحطة التحويل الفرعية في المصنع. (ب) القدرة الابتدائية. (ج) القدرة المفقودة في خطوط النقل. (د) القدرة الثانوية.

31-10 اثبت أنَّ القدرة المفقودة في خطوط النقل (P_L) تُعطى بالمعادلة $P_L = P_T^2 R_L/V^2$ حيثُ تُمثِّل P_T القدرة المنقولة إلى المستهلك و V الجهد الواصل للمستهلك و R_L مقاومة خطوط النقل.

32-10 إذا لزمك نقل 80 kW من القدرة خلال خطي نقل مقاومة كل منهما 0.05 Ω، فما التوفير في القدرة إذا رفع الجهد من 220 V إلى 2200 V عند بداية تحميل الخطين ثم خفض ثانية إلى 220 V عند نهاية الخطوط بدلاً من نقله على جهد 220 V؟ افترض أنَّ كفاءة المُحوِّلين المستخدمين في رفع الجهد وفي خفضه 99%.

الفصل الحادي عشر

المِحَثّات والمُحاثّة

Inductors and Inductance

المِحثّات والمُحاثّة

(Inductors and Inductance)

11-1 تمهيد

يعتمد سلوك دارة كهربائية على جميع المفاهيم التي ناقشناها في الكهرباء والمغناطيسية خلال دراستنا للفصول السابقة. فهو يعتمد على مفاهيم المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي وفرق الجهد الكهربائي والتيار الكهربائي وتوزيع الشحنات والتيارات التأثيرية، وعلى مفاهيم أخرى لم تُبحث بعد. لذلك فإنّ تحليل دارة كهربائية حقيقية استناداً إلى هذه المفاهيم الأساسية أمر معقد في الواقع، ولهذا استحدث مفهوما المقاومة والمواسعة لتبسيط عملية التحليل، كما بيّنا في فصول سابقة. فأصبح من الممكن تمثيل فرق الجهد بين طرفي موصل بدلالة مقاومته والتيار المار فيه. كما أصبح من السهل تمثيل فرق الجهد الناتج عن توزيعات شحنة على موصلات بدلالة مواسعتها والشحنات المتواجدة عليها. وهناك مفهوم ثالث يضاف لمفهومي المقاومة والمواسعة يجعل من الممكن التعبير عن القوة الدافعة الكهربائية المتولدة نتيجة تغير التدفق المغناطيسي بدلالة مشتقة الزمن للتيار. هذا المفهوم هو المُحَاثّة (inductance). وباستخدام مفاهيم المقاومة والمواسعة والمُحَاثّة يُمكن وصف سلوك أية دارة كهربائية بدلالة التيار وتجمعات الشحنات والقوى الكهربائية في الدارة.

لقد تعرّفنا على مفهوم المواسعة في الفصل الخامس، كما تعرفنا على مفهوم المقاومة في الفصل السادس وناقشنا خواص الدارة المكونة من عنصر مواسعة (مكثف) وعنصر مقاومة (مقاوم) في الفصل السابع. وسنتعرف في الفصل الحالي على مفهوم المُحاثّة (inductance)، والمِحثّات (inductors)، أو عناصر الحث. وخير مثال على عناصر الحث هذه هو الملف (coil)، الذي يحتث تحت تأثير تغير التدفق المغناطيسي خلاله ويتولد به تيار تأثيري (أي تيار مستحث) كما بيّنا في الفصل المنصرم.

وسنتعرف كذلك على كيفية حساب قيمة المُحاثّة هذه لمِحَث، ونناقش خواص الدارة المكونة من مقاومة ومِحَث، والدارة المكونة من مكثف ومِحث والتي تعرف باسم دارة الرنين (resonance circuit)، وأخيرا نناقش الدارة التي تحتوي على مكثف ومِحَث ومقاومة (RLC circuit) والتي تسمى بدارة الرنين المخمَّدة. وسوف ترى في دراستك اللاحقة أهميّة الدارة الأخيرة في توليد الموجات الكهرومغناطيسيَّة التي نستخدمها في البث الراديوي والتلفزيوني والتلفوني.

في دراستنا لقانون فارادي في الفصل الماضي، كان المجال المغناطيسي المتدفق خلال عروة من السلك (أو خلال ملف) ناتجا عن مصدر آخر غير العروة، أي كان ناتجا عن تيار مار في عروة أخرى أو عن مغناطيس خارجي. ومن الممكن أن يكون تدفق المجال المغناطيسي خلال منطقة محاطة بعروة (أو دارة) ناتجاً عن تيار مار في العروة نفسها. فإذا تغير التيار المار في العروة فإنَّ المجال المغناطيسي B الناتج عنه يتغير، ويصحب ذلك تغير تدفق المجال المغناطيسي Φ_B خلال العروة. ويؤدي تغير Φ_B إلى احتثاث (أو توليد)، قوة دافعة كهربائية ε في العروة نفسها، تُعطى وفقاً لقانون فارادي بالمعادلة:

$$\varepsilon = - d\Phi_B/dt$$

يتناسب تدفق المجال المغناطيسي مع المجال المكون له، كما تعلم، ويتناسب المجال بدوره مع التيار المولد له (حسب قانون بيوت وسافارت)، لذلك فإنَّ تدفق المجال المغناطيسي خلال العروة يتناسب طردياً مع التيار فيها، اي أنَّ:

$$\Phi_B = L\, i \qquad (1\text{-}11)$$

حيثُ تُمثّل (L) مقدارا ثابتا (ثابت التناسب بين Φ_B و i)، يُعرف باسم المُحاثّة الذاتية للعروة. ويُطلق على العروة أو الملف أو الدارة، التي تمتلك خاصية الاحتثاث أو الحث (induction) هذه اسم المِحَثّ (inductor). ويُمكن كتابة المُحاثّة الذاتية L للعروة، من المعادلة (1-11)، على النحو الآتي:

$$L = \Phi_B / i \qquad (2\text{-}11)$$

وتقاس المُحَاثّة بالهنري (henry)، ويرمز للهنري في النظام الدولي للوحدات (SI)، بالرمز H. ويتضح من المعادلة (2-11) أن:

$$1H = 1Wb / A = 1\ T.m^2 /A$$

وكثيرا ما يكون تعاملنا مع مِحث مكون من عدة عرى (أو لفات) متماثلة، تمر نفس خطوط المجال المغناطيسي خلالها جميعا على حد سواء، كما هي الحال عند التعامل مع ملف لولبي. وفي هذه الحالة نضرب الطرف الأيمن للمعادلة (2-11) بعدد لفات الملف N للحصول على المُحَاثّة الذاتية الكلية للملف. اي أنَّ:

$$L = N\, \Phi_B / i \qquad (3\text{-}11)$$

وتُمثّل Φ_B هنا تدفق المجال المغناطيسي خلال لفة واحدة. ويُرمز للمِحثات في الدارات الكهربائية بالرمز .

وتلعب المُحَاثّة في المغناطيسية دوراً مشابها للدور الذي تلعبه المواسعة في الكهرباء. حيثُ يستفاد من المِحثّات في توليد مجالات مغناطيسية مثلما يستفاد من المكثفات في توليد مجالات كهربائية. ويُمكن اختزان طاقة (مغناطيسية) في المِحثّات مثلما يُمكن اختزان طاقة (كهربائية) في المكثفات. وتعتمد قيمة

المحاثة، كما سنرى في البند اللاحق، على الشكل الهندسي للمحث (أي على أبعاده)، وعلى نوع المادة الموجودة فيه، تماما كما هي الحال مع المكثف، إذ أنّ مواسعته تعتمد على شكله الهندسي وعلى نوع المادة الموجودة فيه.

تُمثّل المعادلة (3-11)، صيغة مناسبة لحساب المُحاثة الذاتية L لملف، بيد أنها ليست الصيغة المثلى لقياس قيمة L. فمن الأنسب لقياس L عمليا تمثيلها بدلالة القوة الدافعة الكهربائية ε المحتثة (أي المتولدة بالتأثير) في المحث، وتغير التيار في المحث di/dt، الذي هو المسبب في تولد ε. إذ إن تغير التيار i مع الزمن هو الذي يسبب تغير المجال B وتغير التدفق المغناطيسي Φ_B خلال المحث، الذي يؤدي إلى احتثاث ε بالتالي. وللحصول على الصيغة العملية للمحاثة الذاتية L، نفاضل المعادلة (1-11)، بالنسبة للزمن فنحصل على العلاقة:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع قانون فارادي، المعادلة (2-10)، نستنتج أنّ:

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt} \qquad (4\text{-}11)$$

وتدل الإشارة السالبة في المعادلة السابقة على أنّ اتجاه القوة الدافعة الكهربائية ε، المحتثة في المحث عند تغير التيار المار به، يكون دائما مُعاكسا لاتجاه التغير في التيار. ويُمكن فهم هذا على ضوء قانون لنز، حيثُ يُمكن مقاومة التغير في التدفق (الناتج عن تغير التيار) عن طريق توليد تدفق مضاد للتغير في التدفق الأصلي. ويستوجب هذا أن يكون اتجاه ε المولدة للتدفق المُعاكس مخالفة في اتجاهها لاتجاه التغير في التيار المولد لها أصلا. وعند الرغبة بقياس المُحاثة الذاتيّة L عمليًا لمِحث فإننا نُمرّر فيه تيارا ونغيّر شدة التيار بمرور الزمن وفق نمط معروف ثمُ نقيس القوة الدافعة المُحتثة فيه، ونعوّض في المعادلة (4-11). ويشبه هذا ما عملناه لقياس مواسعة مكثف، حيثُ قمنا بشحن المكثف بشحنة Q ثم قسنا فرق الجهد V الناتج عنها واستخدامنا المعادلة $C = Q / V$ لإيجاد مواسعة المكثف C ومثلما تعتمد C على النسبة بين Q وV ولا تعتمد على أي من الكميتين وحدها، حيثُ تزداد V عند ازدياد Q بما يكفل بقاء النسبة بينهما ثابتة، فإنّ L تعتمد على النسبة بين ε و di/dt ولا تعتمد على أي من الكميتين وحدها، ويفسر هذا ما قيل سابقا عن المُحَاثة الذاتية بأنها خاصية ذاتية للمِحث تعتمد على شكله الهندسي والمواد الموجودة فيه (أو حوله) فقط.

المِحَث هو نبيطة كهربائيّة، والمفضل مثال عليه هو الملف، يحتث تحت تأثير تغير التدفق المغناطيسي خلاله ويتولد به تيار تأثيري (أي تيار مستحث).

تخزين الطاقة الكهربائيّة.

تُعطى المُحاثّة الذاتيّة L بالعلاقة: $L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}$، أي أنّها تُساوي النسبة بين القوة الدافعة الكهربائية التأثيريّة ومعدل تغير التيار الكهربائي الذي ولّد هذه القوة الدافعة الكهربائية.

3-11 حساب المُحاثّة الذاتيّة

يُمكن حساب قيمة المُحَاثّة الذاتية لملف أو محث نظريا بإحدى طريقتين، تستند الأولى منهما على المعادلة (11-3)، في حين تستند الثانية على المعادلة (11-4). بيد أنّ الطريقة الأولى أسهل بكثير من الطريقة الثانية، ولذلك فهي المتبعة في معظم الأحيان لحساب المُحَاثّة الذاتية.

مثال (11-1)

أوجد المُحَاثّة الذاتية لملف لولبي طويل مساحة مقطعه A وطوله l ويحتوي على n لفة لكل وحدة طول.

الحل:

لحساب محاثة الملف الذاتية، نتخيل تياراً i يمر فيه، ثم نحسب قيمة تدفق المجال المغناطيسي Φ_B الناتج عن هذا التيار في الملف، وأخيراً نعوض في المعادلة (11-3). ووفقا للمعادلة (9-15)، فإنّ المجال المغناطيسي B داخل الملف اللولبي يُعطى بالعلاقة:

$$B = \mu_0 n i = \mu_o N i / l$$

حيثُ تُمثل N عدد لفات الملف اللولبي الكلي ($N = n l$)، وعليه فإنّ تدفق المجال المغناطيسي Φ_B من أية لفة (ما عدا اللفات القليلة الواقعة عند نهايتي الملف اللولبي)، يُعطى بالعلاقة:

$$\Phi_B = B A = \mu_o N i A / l$$

وباستخدام المعادلة (11-3)، نجد أنّ:

$$L = N \Phi_B / i = N \mu_0 N i A / l i$$

$$\therefore L = \mu_0 N^2 A / \ell = \mu_0 n^2 l A \qquad (5\text{-}11)$$

ونلاحظ من نتيجة هذا المثال أنّ L تعتمد على طول الملف l، وعلى مساحة مقطعه A التي تحدد شكله الهندسي، وعلى ثابت إنفاذية الوسط (الفراغ) للتأثير المغناطيسي. ولا تعتمد على التيار التخيلي i، ولا على التدفق الناتج عنه، تماما كما هو متوقع.

حيث ترمز L_0 للمحاثة الذاتية في حالة الفراغ [illegible]

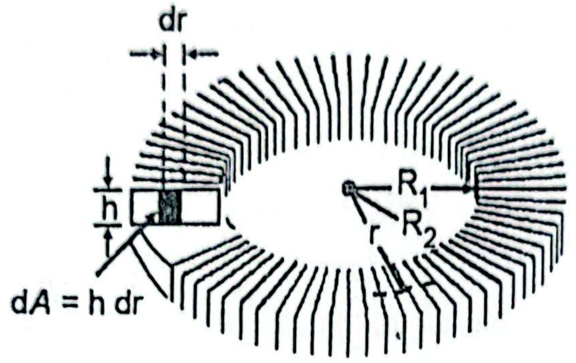
مما تقدم فإنّ محاثة الملف اللولبي الذاتية بعد إدخال لب الحديد فيه تصبح:

$$L = \kappa_M L_0 = 3000\times 6.7\times 10^{-4}$$
$$= 2.01\ \text{H} = 2010\ \text{mH}$$

■ مثال (3-11)

ملف إطاري يحتوي على N لفة، نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2، ومقطعه على شكل مستطيل، ارتفاعه h، كما في الشكل (1-11). احسب محاثة الملف الذاتية.

الحل:



الشكل (1-11)

نتخيل مرور تيار i خلال الملف، كما في المثال (1-11)، ونجد المجال المغناطيسي عند أية نقطة داخل الملف على بعد r من مركزه، وذلك باستخدام المعادلة (9-16) التالية:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\ ;\ (R_1 < r < R_2) \qquad (16\text{-}9)$$

ثم نحسب تدفق المجال المغناطيسي Φ_B خلال لفات الملف على النحو التالي:

$$d\Phi_B = B\,dA = B\,h\,dr$$

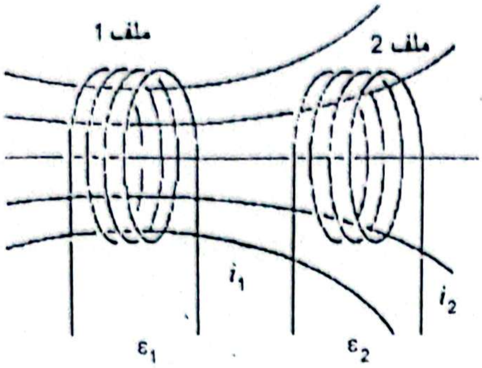
$$\therefore\ \Phi_B = \int B\,h\,dr = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\right)\ln\frac{R_2}{R_1}$$

وأخيراً نعوض في المعادلة (3-11)، فنحصل على المُحَاثة الذاتية للملف الإطاري على النحو التالي:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \left(\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\right)\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (10\text{-}11)$$

تُعطى مُحَاثة ملف إطاري يحتوي على N لفة، نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2، ومقطعه على شكل مستطيل ارتفاعه h بالعلاقة: $L = \dfrac{N\Phi_B}{i} = \left(\dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\right)\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

4-11 المحاثة المتبادلة (Mutual Inductance)



الشكل (11-2)

عند وضع ملفين قرب بعضهما كما في الشكل (11-2)، ومرور تيار متغير في أحدهما فإنّ قوة دافعة كهربائية ε تتولد بالتأثير في الملف الآخر.

ووفقًا لقانون فارادي، تتناسب ε_2 المتولدة في الملف 2 مع معدل تغير التدفق المغناطيسي خلاله. وبما أنّ هذا التدفق ناتج عن التيار i_1 المار في الملف 1 فإنّه يُمكن تمثيل ε_2 بدلالة i_1.

لنفترض أنّ Φ_{21} تُمثّل تدفق المجال المغناطيسي خلال كل عروة من عرى الملف 2 الناتج عن التيار i_1، فتكون $N_2\,\Phi_{21}$ ممثلة للتدفق خلال جميع لفات الملف 2 نتيجة التيار i_1، وذلك على افتراض أنّ الملف 2 مكون من عدد N_2 من اللفات المتراصة. ويتناسب مقدار $N_2\,\Phi_{21}$ طرديًا مع i_1، ويسمى ثابت التناسب بالمُحَاثّة المتبادلة (mutual inductance)، ويرمز له بالرمز M_{21}، ويُعرّف بالمعادلة:

$$M_{21} = \frac{N_2\,\Phi_{21}}{i_1} \qquad (11\text{-}11)$$

من ناحية أخرى فإنّ القوة الدافعة الكهربائية ε_2 المتولدة في الملف 2 نتيجة تغير التيار المار في الملف 1 تُعطى حسب قانون فارادي بالمعادلة:

$$\varepsilon_2 = -N_2\,\frac{d\Phi_{21}}{dt} \qquad (12\text{-}11)$$

وبالتعويض عن Φ_{21} من المعادلة (11-11)، نجد أنّ:

$$\varepsilon_2 = -M_{21}\,\frac{di_1}{dt} \qquad (13\text{-}11)$$

تربط المعادلة (13-11) بين التيار في الملف 1 والقوة الدافعة الحثيّة في الملف 2. وتُمثّل M_{21} مقدارا ثابتا يعتمد على حجم وشكل وعدد لفات كل من الملفين 1 و 2 وموضعهما، وينظر إليها على أنّها محاثة الملف 2 بالنسبة للملف 1. كما يعتمد مقدار M_{21} على وجود مادة فرومغناطيسية داخل الملفين أو قربهما من بعضهما ويُمكن حساب قيمة المُحَاثّة المتبادلة لملفين في بعض الحالات بطريقة نظرية، ولكنها تُحدّد بشكل عام بطرق تجريبية عملية. لنفترض الآن وجود وضع معاكس. أي لنفترض أنّ تيارا متغيرا يمر في الملف 2 ويولد في الملف 1 قوة دافعة كهربائية ε_1. في هذه الحالة نستطيع اشتقاق صيغة لـ ε_2 على النحو التالي:

$$\varepsilon_1 = -M_{12}\,\frac{di_2}{dt} \qquad (14\text{-}11)$$

اننا لن نثبت ذلك هنا، وعليه فإنه يُمكن الاستغناء عن الرموز الدليلية السفلية وكتابة:

$$M = M_{12} = M_{21} \tag{15-11}$$

وهكذا يُمكن كتابة معادلتي القوتين الدافعتين الكهربائيتين ε_1 و ε_2 على النحو الآتي:

$$\varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt} \qquad (16\text{-}11\ \text{أ})$$

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt} \qquad (16\text{-}11\ \text{ب})$$

كما يُمكن كتابة المُحَاثّة المتبادلة على النحو الآتي:

$$M = -\frac{\varepsilon_1}{di_2/dt} = -\frac{\varepsilon_2}{di_1/dt} \tag{17-11}$$

وتقاس المُحَاثّة المتبادلة بنفس وحدة المُحَاثّة الذاتية، أي بالهنري (H).

وخير مثال على المُحَاثّة المتبادلة هو المُحوّل الكهربائي، الذي يكون الترابط فيه بين الملفين الابتدائي والثانوي أكبر ما يُمكن، حيثُ يعمل اللب الحديدي الموجود داخله على تمرير جميع خطوط المجال المغناطيسي (تقريبا) المتدفقة من الملف الابتدائي إلى الملف الثانوي. وهنالك تطبيقات أخرى مهمة على الحث المتبادل في الحياة العملية، كما في حالة جهاز ضابط معدل نبضات القلب (pacemaker)، الذي يستخدمه بعض مرضى القلب لضبط نبضات قلوبهم، ولتقوية عضلاتها حيثُ يُدخل في جسم المريض جهاز إلكتروني للقيام بالعمل المطلوب وذلك عن طريق عملية جراحية. ويُستفاد من المُحَاثّة المتبادلة هنا في تزويد الجهاز بالقدرة الكهربائية اللازمة لعمله من خارج الجسم، حيثُ يوجد مع الجهاز داخل جسم المريض ملف مناسب يتأثر بتغير تدفق المجال المغناطيسي خلال ملف آخر يحمله المريض معه، وتتولد به القوة الدافعة الكهربائية بالتأثير. ولا يخفى عليك أهمية هذا الأمر، إذ أنّه بغير هذا سيضطر المريض لإجراء عملية جراحية كلما نفدت طاقة البطارية (لو كان الجهاز الداخلي يعمل على بطارية) لغرس بطارية جديدة. وعادة يكون الملف الخارجي مربوطا على جسم المريض قرب مكان وجود الملف الداخلي، ويتغذى الملف الخارجي بالقدرة الكهربائية المتغيرة من بطارية يحملها المريض في جيبه بدلا من أن تكون مغروسة داخل جسمه.

لا تكون المُحَاثّة المتبادلة دائماً مفيدة على أية حال، فكثيراً ما تسبب لنا مشاكل نضطر لصرف جهد ومال من أجل التخلص منها. ففي الدارات الالكترونية، كدارات أجهزة الإرسال والاستقبال الراديوي والتلفزيوني يحث أي ملف موجود فيها الملفات أو العرى (أو حتى النبائط) المجاورة له، ويولد فيها تيارات تأثيرية غير مرغوب بها، وفي هذه الحالات علينا أن نبحث عن الدرع المناسب لوقاية النبائط الحساسة الحرجة بالنسبة لقيام الجهاز بعمله من تأثير المحاثات عليها.

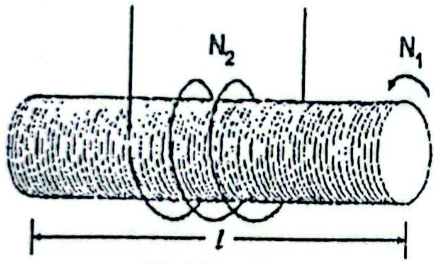
إذا كانت ε_1 هي القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في مِحَث L_1 يمر به تيار شدته i_1 الناتجة عن وضعه قرب مِحَث آخر L_2 يمر به تيار شدته i_1 وإذا كانت ε_2 هي القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في المِحَث L_2، فإنّ المُحَاثّة المتبادلة بينهما تُعطى بالعلاقة:

$$M = -\frac{\varepsilon_1}{di_2/dt} = -\frac{\varepsilon_2}{di_1/dt}$$

مثال (11-4)

يحتوي ملف لولبي طويل على عدد N_1 من اللفات المتراصة، وملفوف عليه ملف آخر عدد لفاته N_2، كما في الشكل (11-3). افترض أنّ طول الملف اللولبي l ومساحة مقطعه A، وأنّ جميع خطوط المجال المغناطيسي التي تتدفق من الملف اللولبي (عند مرور تيار فيه)، تمر خلال الملف الخارجي (الملفوف على الملف اللولبي)، واحسب المُحَاثّة المتبادلة للملفين.

الحل:



الشكل (11-3)

إذا مر تيار i_1 في الملف اللولبي الذي عدد لفاته N_1 وطوله l، فإنّ المجال المغناطيسي B_1 داخله يُعطى بالمعادلة (9-15) التالية:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

وبما أنّ المجال B_1 يتدفق خلال الملف الخارجي، الذي عدد لفاته N_2، والذي يحيط بالملف اللولبي، فإنّ تدفق المجال المغناطيسي خلال الملف الخارجي Φ_{21} يكون:

$$\Phi_{21} = BA = \frac{\mu_0 N_1 i_1 A}{l}$$

وبالتعويض في المعادلة (11-11) نستنتج أنّ:

$$M_{21} = M = N_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}$$

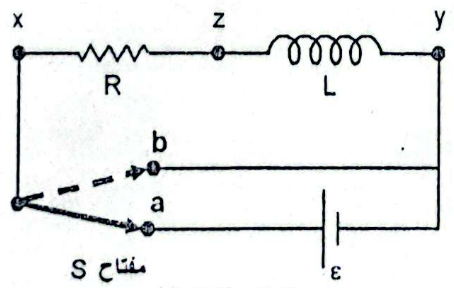
لاحظ أننا حسبنا في هذا المثال M_{21} هنا، وهي مماثلة لـ M_{12} و لـ M كما في المعادلة (11-15)، إلا أنّ حساب M_{12} ليس بالأمر السهل في هذا المثال لعدم توفر معلومات كافية عن أبعاد الملف الخارجي. وعادة نختار أسهل وأفضل طريقة لحساب المُحَاثّة المتبادلة (M).

☐ 6-11 دارة مِحث ومقاومة (RL - circuit)

تحتوي جميع الدارات التي يمر بها تيار متغير على محثات، أبسطها أسلاك التوصيل، حيثُ يتولد تيار تأثيري في أسلاك التوصيل هذه عندما يتغير التيار المار بها. ولا تكون محاثة الأسلاك عادة مهمة. وتصبح المُحَاثَة ذات أهمية في الدارات التي يوجد بها مِحَث على شكل ملف مكون من عدة لفات ويكون الملف مصنوعا، كما تعلم، من أسلاك معدنية (لها مقاومة) ملفوفة بأشكال مختلفة. وعليه يُمكن اعتبار أي مِحَث في دارة كهربائية على أنّه مؤلف من جزئين، هما مقاومة سلك المِحَث R ومحاثته L، موصولتين معا على التوالي، كما هو مبين في الشكل (11-4). ويُمكن بشكل عام اعتبار R ممثلة لمقاومة المِحَث ولأية مقاومات أخرى في دارته، كما يُمكن اعتبار L الموصولة على التوالي مع R، ممثلة للمِحثات في الدارة. ونناقش في هذا البند خواص دارة مغلقة تحوي مقاومة R ومِحَث L موصولين مع مصدر جهد ε (بطارية مثلا)، كما في الشكل (11-4).

عند إغلاق الدارة بوضع المفتاح S في الوضع a، فإنّ تيارا كهربائيا سيسري بالطبع في الدارة المغلقة.ويؤدي تغير قيمة التيار المار في الدارة وتزايده لحظة إغلاقها إلى توليد قوة دافعة تأثيرية فيها، تعمل على إعاقة تزايد التيار وفقا لقانون لنز. أي تعمل على إعاقة نمو التيار الناتج عن البطارية ε وبالتالي فإنّ هذا التيار لا ينمو فجأة إلى قيمته القصوى لحظة إغلاق الدارة، وإنّما ينمو بمعدل متغير يعتمد في قيمته على R و L. ويُشبه سلوك هذه الدارة سلوك دارة أخرى تعرفت عليها سابقا في الفصل السابع هي دارة RC. حيثُ أوضحنا في حينه أنّ الشحنة على المكثف تنمو أيضا بمرور الزمن بمعدل يعتمد في قيمته على R و C في الدارة.

ولإيجاد التيار الكهربائي i المار في الدارة عند أية لحظة من الزمن t، فإننا نطبق قانون كيرشوف الثاني الخاص بالمسار المغلق، على المسار x z y x، حيثُ أنّ:



الشكل (11-4)

$$V_{xz} + V_{zy} + V_{yx} = 0$$

وباستخدام قانون أوم، والتعويض عن فروق الجهد في المعادلة السابقة، حيثُ:

$$V_{yx} = -\varepsilon\,;\ V_{zy} = +L\frac{di}{dt}\,;\ V_{xz} = +iR$$

نجد أنّ:

$$iR + L\frac{di}{dt} - \varepsilon = 0$$

$$iR + L\frac{di}{dt} = \varepsilon \qquad (22\text{-}11)$$

وتُمثّل هذه العلاقة معادلة تفاضلية، يُمكن حلها بطريقة مشابهة لحل دارة RC، وذلك بفصل المتغيرين عن بعضهما وإجراء التكامل. أي أنَّ:

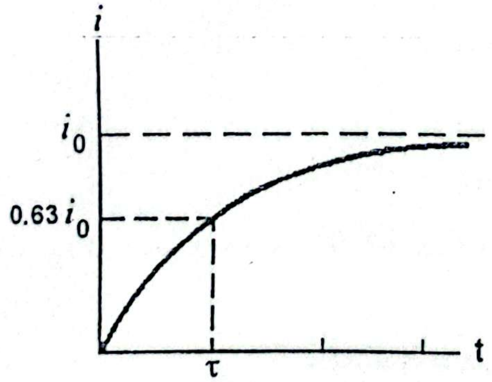
$$\int_0^i \frac{di}{\varepsilon - iR} = \frac{1}{L}\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon}\right) = \frac{t}{L}$$

ومنها فإنَّ:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = i_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (23\text{-}11)$$

حيثُ تُمثّل $i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ قيمة التيار القصوى وتُمثّل τ مقداراً ثابتاً يساوي $\frac{L}{R}$، ويعرف بثابت الزمن الحثي (inductive time constant). ويُمكن تعريفه بالزمن اللازم لنمو التيّار اللحظي من الصفر وحتى تصل قيمته 0.63 من قيمته القصوى وتلاحظ من المعادلة (11-23) أنّه في اللحظة (t = 0) التي يغلق بها المفتاح S على النقطة a، يكون التيار صفراً ($i = 0$)، ويبدأ التيار بالتزايد بشكل أسي مع الزمن. حيثُ تؤول قيمته إلى $\frac{\varepsilon}{R}$ عندما تؤول t إلى المالانهاية ويوضح الشكل (11-5)، العلاقة بين التيار i والزمن t لدارة RL.



الشكل (11-5)

يتغير التيار i المار في دارة مِحَث (L) ومقاومة (R) موصولين مع مصدر جهد ε أسيًا مع الزمن حسب العلاقة: $i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = i_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

حيثُ τ ثابت يساوي $\frac{L}{R}$، ويعرف بثابت الزمن الحثي.

■ مثال (11-5)

إذا علمت أنَّ $R = 30\ \Omega$ و $L = 300\ mH$ و $\varepsilon = 10V$ في الدارة المبينة في الشكل (11-4)، وأنه قد مضى زمن $t = 2\ ms$ على إغلاق المفتاح S في الوضع a، فأوجد: (أ): التيار المار في الدارة. (ب): فرق الجهد بين طرفي المقاومة R. (جـ): القدرة الكهربائية التي يمد المصدر ε بها الدارة. (د): القدرة الحرارية اللحظية المبددة في المقاومة R.

الحل:

(أ) نحسب أولاً ثابت الزمن الحثي للدارة (τ)، وذلك لتبسيط التعويض في المعادلة (11-23)، حيث نجد أنَّ:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{300\times10^{-3}\ H}{30\Omega} = 0.01\,s = 10\ ms$$

وبالتعويض في المعادلة (11-23)، نحصل على:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = \frac{10}{30}\left(1-e^{-2/10}\right) = 0.06\ A$$

(ب) يُمكن إيجاد فرق الجهد اللحظي بين طرفي المقاومة R بتطبيق قانون أوم على النحو التالي:

$$V_R = i\,R = 0.06\times30 = 1.8V$$

(جـ) نحسب القدرة الكهربائية اللحظية التي يمد المصدر بها الدارة من العلاقة:

$$P_\varepsilon = i\,\varepsilon = 0.06\times10 = 0.6\ W$$

(د) نحسب القدرة الحرارية اللحظية المبددة في المقاومة R من العلاقة:

$$P_R = i^2 R = (0.06)^2\times30 = 0.108\ W$$

لنناقش الآن ما يحدث عند فصل المفتاح S عن النقطة a، في الشكل (11-4)، ووصله مع النقطة b. في هذه الحالة سوف لا يكون في الدارة المغلقة أي مصدر جهد ($\varepsilon = 0$)، وبذلك يُمكن التعويض في المعادلة (11-22) عن ε بالصفر فنجد أنَّ:

$$iR + L\frac{di}{dt} = 0\ ;\ (\varepsilon = 0)$$

ويُمكن ترتيب المتغيرين في هذه المعادلة وإجراء التكامل ببساطة على النحو التالي:

$$\int_{i_0}^{i}\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \qquad (24\text{-}11)$$

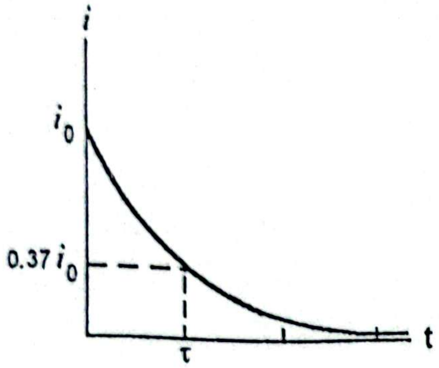
ونلاحظ من هذه المعادلة أنَّ $i = i_0$ عندما $t = 0$، وذلك لأنَّ التيار اللحظي عند إغلاق الدارة (الوضع

b)، يكون أعظم ما يُمكن، ويساوي $\frac{\varepsilon}{R}$. وهكذا فإنّ نتيجة التكامل المبين في المعادلة (24-11)، تصبح:

$$i = i_0\, e^{-t/\tau} = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/\tau} \qquad (25\text{-}11)$$

حيثُ تُمثّل τ هنا أيضا ثابت الزمن الحثي $\left(\frac{L}{R}\right)$ للدارة.

ويبين الشكل (6-11)، تمثيلاً بيانيا للمعادلة (25-11)، حيثُ نلاحظ أنّ التيار المار في الدارة يضمحل أسيا مع الزمن. وبعد زمن قدره τ (أي بعد مرور ثابت زمن حثي واحد)، ينخفض التيار i إلى 0.37 من قيمته القصوى i_0، كما يتضح من المعادلة (25-11)، عند التعويض عن t بالقيمة τ.



الشكل (6-11)

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-1} = \frac{\varepsilon}{R} \times \frac{1}{2.73} \cong 0.37\, \frac{\varepsilon}{R} = 0.37\, i_0 \qquad (26\text{-}11)$$

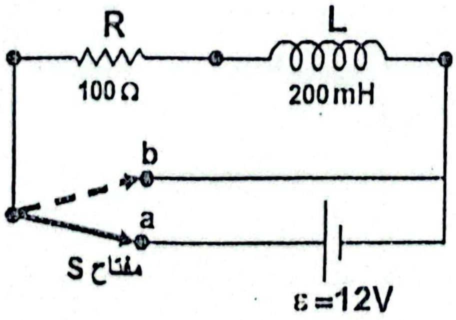
يتغير التيار i المار في دارة مِحَث (L) ومقاومة (R) موصولين معا (بدون وجود مصدر جهد) مع الزمن حسب العلاقة: $i(t) = i_0\, e^{-t/\tau}$

حيثُ $\tau = \frac{L}{R}$، ثابت الزمن الحثي لهذه الدارة.

مثال (6-11)

وُصِل المفتاح S في الدارة المبينة في الشكل (7-11) مع النقطة a لفترة طويلة، ثم فُصِل المفتاح عن النقطة a ووُصِل مع النقطة b.

احسب:



الشكل (7-11)

(أ) ثابت الزمن الحثي للدارة. (ب) التيار المار في الدارة لحظة وصل المفتاح مع النقطة b. (ج) التيار المار في الدارة بعد مرور 10 ms من وصل المفتاح مع النقطة b. (د) الزمن اللازم لكي يضمحل التيار إلى نصف ما كان عليه قبل وصل المفتاح S مع النقطة b. (هـ) القدرة الحرارية اللحظية المُبدَدة في المقاومة R بعد مرور 10 ms على وصل المفتاح مع النقطة b.

الحل:

(أ) نجد ثابت الزمن الحثي للدارة من العلاقة:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{200\times10^{-3}}{10} = 0.02\ s = 20\ ms$$

(ب) التيار اللحظي المار في الدارة قبل وصل المفتاح مع النقطة b يساوي قيمة التيار القصوى i_0 عندما يكون المفتاح على الوضع a. أي أنّ:

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{12}{10} = 1.2\ A$$

(ج) بالتعويض في المعادلة (11-25)، نجد أنّ التيار اللحظي المار في الدارة بعد مرور 10 ms يساوي:

$$i = i_0\, e^{-t/\tau} = 1.2\, e^{-10/20} = 0.73\ A$$

(د) لنطبّق المعادلة (11-25) لإيجاد الزمن اللازم حتى يضمحل التيار إلى قيمة تساوي: $\frac{i_0}{2}$. أي أننا نبحث عن قيمة t التي تُحقق المعادلة التالية:

$$i = \frac{i_0}{2} = i_0\, e^{-t/20}$$

ومنها فإنّ:

$$t = 13.86\ ms$$

(هـ) نحسب القدرة الحرارية المبددة في المقاومة بعد مرور 10 ms على وصل المفتاح S مع النقطة b من العلاقة:

$$P_R = i^2 R = (0.73)^2 \times 10 = 5.3\ W$$

□ 11-7 الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي

(Energy stored in the magnetic field)

بيّنا عند مناقشتنا لموضوع المكثفات (الفصل الخامس)، أنّ الشغل الذي يبذله مصدر القوة الدافعة الكهربائية ε على مكثف مواسعته C، يُختزن على شكل طاقة كهربائية في المجال الكهربائي E.

ونناقش الآن حالة مماثلة لما يحدث للطاقة الكهربائية عند توصيل مصدر قوة دافعة كهربائية ε مع ملف محاثته L. فلو أخذنا مثلاً الدارة المبينة في الشكل (4-11)، وأغلقنا المفتاح S بوضعه على النقطة a، فإننا نستطيع وصف التيار المار في الدارة من قانون كيرشوف الثاني وفق المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة بالتيار i نحصل على:

$$\varepsilon i = i^2 R + L i \frac{di}{dt} \qquad (27\text{-}11)$$

ويُعبِّر هذه المعادلة عن قانون حفظ الطاقة في الدارة الكهربائية. فالطرف الأيسر للمعادلة يُمثّل الشغل الذي يبذله مصدر القوة الدافعة الكهربائية ε في دفع الشحنات الكهربائية في الثانية. أي يساوي معدل الطاقة التي يصرفها المصدر ε في تحريك الشحنات الكهربائية في الدارة. ويُمثّل الحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة ($i^2 R$) معدل تبديد الطاقة الحرارية في المقاومة R. ويبقى لدينا الحد الثاني والأخير للمعادلة ($L\, i\, di/dt$)، فهو يُمثّل الطاقة التي تختزن في المِحَث L. وتظهر هذه الطاقة في المِحَث على شكل طاقة مغناطيسية في المجال المغناطيسي B المتولد داخل المِحَث. فعندما يصل التيار i إلى قيمته القصوى فإنَّ di/dt ستساوي صفراً. وبالتالي يتوقف المصدر ε عن تزويد المِحَث بالطاقة، وعليه فإنَّ الحد الثاني في الطرف الأيمن للمعادلة (27-11) يُعبِّر عن القدرة المختزنة في المجال المغناطيسي المتولد خلال المِحَث أي أنَّ:

$$\frac{dU_B}{dt} = L i \frac{di}{dt}$$

ويُمكن كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي:

$$dU_B = L\, i\, di \qquad (28\text{-}11)$$

حيثُ تُمثّل U_B الطاقة المغناطيسية المخزونة في المِحَث. ولحساب كمية هذه الطاقة عندما يزداد التيار في المِحَث من صفر إلى i، نكامل طرفي المعادلة (28-11)، فنحصل على:

$$\int_0^{U_B} dU_B = L \int_0^{i} i\, di$$

ومنها فإنَّ:

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 \qquad (29\text{-}11)$$

وهذه النتيجة تماثل المعادلة (17-5) التي حصلنا عليها سابقا للطاقة الكهربائية U_E المختزنة في مكثف مواسعته C ويحمل شحنة Q.

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

ونبين فيما يلي كيفية استخدام المعادلة (11-29) لحساب الطاقة المغناطيسية المختزنة داخل ملف لولبي طوله l ومساحة مقطعه A ويحتوي على عدد N من اللفات. كنّا قد بيّنا في المثال (11-1) أنّ محاثة الملف اللولبي الذاتية تُعطى بالمعادلة (11-5) التالية:

$$L = \mu_0 N^2 A / l$$

وبالتعويض عن قيمة L من هذه المعادلة في المعادلة (11-29)، نحصل على الطاقة المغناطيسية (U_B) في الملف اللولبي. أي أنّ:

$$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 A i^2 / l \qquad (30\text{-}11)$$

وبما أنّ المجال المغناطيسي الناشئ عن مرور تيار i في الملف اللولبي يكون منتظما داخله ولا يعتمد على المكان (المجال المغناطيسي خارج الملف اللولبي يساوي صفرا)، فإنّ الكثافة الحجمية للطاقة المغناطيسية u_B في الملف اللولبي تساوي:

$$u_B = \frac{U_B}{\text{الحجم}} = \frac{\mu_0 N^2 A i^2 / l}{A l} = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{N^2}{l^2}\right) i^2$$

وبما أنّ المجال المغناطيسي B داخل الملف اللولبي يساوي:

$$B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

فإنّ:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad (31\text{-}11)$$

وبالرغم من أنّ اشتقاق هذه المعادلة كان مبنيا في الأساس على المجال المغناطيسي داخل الملف اللولبي، إلا أنّه يُمكن اعتبارها معادلة عامة تعبر عن الكثافة الحجمية للطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي لأي مِحَث بغض النظر عن شكله. أما إذا كان المجال المغناطيسي يؤثر في منطقة تحوي مادة مغناطيسية، مثل المواد الفرومغناطيسية، فإنّ ثابت الإنفاذية للمادة μ يستبدَل بثابت الإنفاذية للفراغ μ_0 في المعادلة (11-31). وتصبح تلك المعادلة على النحو التالي:

$$u_B = \frac{1}{2\mu} B^2 \qquad (32\text{-}11)$$

وقبل الانتهاء من مناقشة هذا الموضوع، حري بنا الإشارة إلى الشبه الكبير بين المعادلة (11-31) ومعادلة كثافة الطاقة الحجمية المختزنة في المجال الكهربائي عند أي نقطة داخل المجال، حيثُ كانت

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

- **تتناسب كثافة الطاقة المغناطيسية الحجمية في نقطة ما في الفراغ طردياً مع مربع قيمة شدة المجال المغناطيسي في تلك النقطة.**

مثال (11-7)

احسب معدل الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي للمِحَث L المذكور في المثال (11-5).

الحل:

تُعطى الطاقة المغناطيسية المخزونة في المِحَث L بالمعادلة:

$$U_B = \frac{1}{2} L\, i^2$$

وتُمثِّل i هنا التيار اللحظي في الدارة وللحصول على الطاقة المخزونة عند أية لحظة في المِحَث، أي على القدرة P_L، نجد المشتقة الأولى للمعادلة السابقة بالنسبة للزمن،

$$P_L = \frac{dU_B}{dt} = \frac{1}{2} L\, 2i\, \frac{di}{dt} = L\, i \frac{di}{dt} \qquad (11\text{-}33)$$

وبالتعويض عن قيمة التيار من العلاقة:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

- وإيجاد المشتقة الأولى للتيار i بالنسبة للزمن (di/dt) والتعويض عنها وعن i في المعادلة (11-33)، نجد أنَّ:

$$\frac{dU_B}{dt} = L\frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\left(\frac{\varepsilon}{R\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

ومنها فإنَّ:

$$\frac{dU_B}{dt} = \frac{L}{\tau}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 \left(e^{-t/\tau}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

وبالتعويض عن $t = 2\ ms$ و $\varepsilon = 10\ V$ و $R = 30\ \Omega$ و $L = 300\ mH$ و $\tau = \frac{L}{R} = 10\ ms$،

نستنتج أنَّ:

$$P_L = \frac{dU_B}{dt} = 0.495\,W$$

ونلاحظ من نتيجة هذا المثال والفرعين (جـ) و (د) من المثال (11-5)، أنّ الطاقة محفوظة. إذ أنّ قدرة البطارية (P_ε) المغذاة للدارة تساوي مجموع القدرة الحرارية المبددة (P_R) والقدرة المغناطيسية المخزونة (P_L). أي أنّ:

$$P_\varepsilon = P_L + P_R = 0.495 + 0.108 = 0.6\,W$$

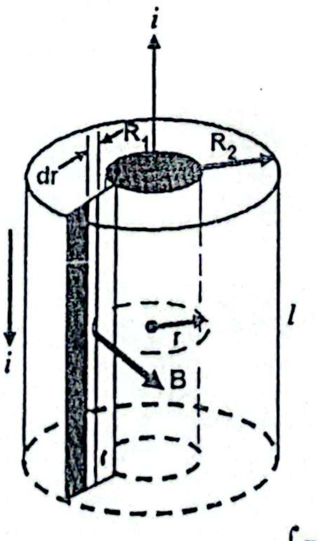
وهذه نفس قدرة البطارية (P_ε) التي حصلنا عليها من المثال (11-5).

مثال (11-8)

يبين الشكل (11-8)، كيبلا طويلا مكونا من موصلين أسطوانيين متحدي المحور (coaxial cable). الموصل الأول منهما عبارة عن اسطوانة نصف قطرها R_1، والثاني عبارة عن قشرة معدنية رقيقة نصف قطرها R_2 تحيط بالأول وتتحد معه في المحور. إذا بدأ تيار كهربائي i بالمرور في الموصل الاسطواني وأكمل دورته خلال القشرة المعدنية الاسطوانية، فأوجد: (أ) كثافة الطاقة الحجمية المخزونة في المجال المغناطيسي بين الموصلين. (ب) الطاقة المغناطيسيَّة المخزونة في المجال المغناطيسي بين الموصلين لكل وحدة طول.

الحل:

(أ): نحتاج لإيجاد كثافة الطاقة الحجمية إلى شدة المجال المغناطيسي على بعد r عن محور الموصل الاسطواني. ويُمكن إيجاد هذا المجال عند أية نقطة بين الموصل الاسطواني والقشرة على بعد r عن المحور ($R_1 < r < R_2$) بتطبيق قانون أمبير على النحو التالي:



الشكل (11-8)

$$\oint B.dl = B\oint dl = B(2\pi r) = \mu_0\, i$$

ومنها نجد أنّ:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \;;\; (R_1 < r < R_2)$$

أما المجال المغناطيسي عند النقاط الواقعة على بعد أكثر من نصف قطر القشرة الخارجية $r > R_2$، فإنه يساوي صفراً ($B = 0$). ويُمكن إثبات هذا من تطبيق قانون أمبير على مسار مغلق خارج القشرة الأسطوانية، حيثُ يكون التيار المار في الموصل الداخلي مساوياً للتيار المار في القشرة ومعاكساً له بالاتجاه، أي أنَّ التيار الكلي داخل المسار المغلق يُساوي صفراً. ولذلك فإنَّ المجال المغناطيسي يكون:

$$B = 0 \;;\; (r < R_2)$$

وبالتعويض عن شدة المجال المغناطيسي بين الموصل والقشرة في المعادلة (11-31)، نجد أنَّ كثافة الطاقة الحجمية u_B تساوي:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$$

(ب) لإيجاد الطاقة الكلية المخزونة بين الموصل والقشرة نحسب الطاقة dU_B الموجودة في قشرة أسطوانية تخيلية لصف قطر قاعدتها r وطولها l وسمكها dr (موجودة بين الموصل والقشرة)، ثم نجري عملية مكاملة على هذه القشرة التخيلية عندما يتغير نصف قطرها من R_1 إلى R_2 للحصول على الطاقة الكلية U_B. ويتضح هذا من الخطوات التالية:

$$dU_B = u_B \, dV$$

حيثُ تُمثّل dV حجم القشرة الاسطوانية التخيلية، ويُمكن كتابة قيمة هذا الحجم على النحو $dV = 2\pi r \ell \, dr$. وبالتعويض عن dV و u_B في المعادلة السابقة نجد أنَّ:

$$dU_B = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l \, dr$$

وبإجراء التكامل لطرفي المعادلة السابقة، نجد أنَّ الطاقة المغناطيسية المخزونة في المجال المغناطيسي بين الموصل والقشرة الاسطوانية لطول l منهما يساوي:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\right) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

وعليه فإنَّ الطاقة المغناطيسية المخزونة في وحدة الطول من الكيبل تساوي:

$$\frac{U_B}{l} = \left(\frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\right) \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \qquad (34\text{-}11)$$

أما الطاقة المغناطيسية المخزونة خارج الموصل والقشرة الاسطوانيين فإنها تساوي صفراً، لأنَّ المجال المغناطيسي خارجهما يساوي صفراً.

تُعطى الطاقة المغناطيسية المختزنة في وحدة الطول في حالة كيبل متحد المحور نصف قطر أسطوانته الداخلية R_1، ونصف قطر قشرته الأسطوانيّة الخارجيّة R_2 ويمر به تيار شدته i

بالعلاقة: $$\frac{U_B}{l} = \left(\frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\right)\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

في حين أنّ الطاقة المغناطيسية المخزونة خارج الموصل والقشرة الاسطوانيين تساوي صفراً، لأنّ المجال المغناطيسي خارجهما يساوي صفراً.

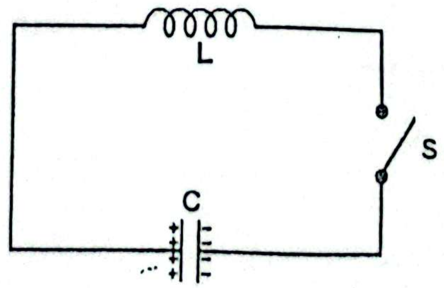
8-11 دارة مِحَث ومكثف (LC - circuit)

تُمثّل المقاومة R والمكثف C والمِحَث L ثلاثة نبائط أساسية تدخل في العديد من الدارات الكهربائية بالإضافة إلى مصدر القدرة الكهربائية ε. وقد تعرفنا على خواص دارة RL في البند (11-5) من هذا الفصل. وكنا قبل ذلك قد تعرفنا على دارة RC في الفصل السابع. ونتعرف في هذا البند على خواص الدارة المكونة من مِحَث L ومكثف C، أو ما يعرف بدارة LC. ونفترض في مناقشتنا هنا أنّ المِحَث مثالي أي خالٍ من أي مقاومة. وسوف نناقش في البند القادم دارة مِحَث عملي (له مقاومة R) ومكثف C، أو ما يعرف بدارة RLC.

يبين الشكل (11-9) دارة تحتوي على مكثف C وملف (مِحَث) L كما تحتوي الدارة على مفتاح S لتوصيلهما ببعضهما. لنفرض أنّ المكثف C كان مشحوناً أصلاً، بحيثُ تحمل صفيحته اليسرى شحنة موجبة $+q_0$ وتحمل صفيحته اليمنى شحنة سالبة $-q_0$. عندئذ تكون الطاقة الكهربائية المخزونة في المجال الكهربائي للمكثف مساوية

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

ولنفترض أنّ المفتاح S أغلق في اللحظة $t = 0$. عندها يبدأ المكثف C بتفريغ شحنته عبر الملف L، وبذلك يمر تيار كهربائي في الملف يزداد بتناقص شحنة المكثف. وعند أية لحظة يكون فرق الجهد بين طرفي المكثف q/C (حيثُ تُمثّل q شحنة المكثف عند تلك اللحظة) مساوياً لفرق



الشكل (11-9)

الجهد بين طرفي الملف $L\,di/dt$ وفي اللحظة التي تصبح بها شحنة المكثف صفراً $(q = 0)$ تكون الطاقة المختزنة فيه صفراً أيضاً $(U_E = 0)$ ويكون التيار المار في الملف أعظم ما يُمكن. كما يكون

التغير في التيار عندها صفراً.

$$\therefore \quad \left(-L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} = 0\right)$$

وبالتالي تكون الطاقة المغناطيسية المخزونة في الملف أعظم ما يُمكن، أي أنّ:

$$U_B = \frac{1}{2} L\, i_0^2$$

حيثُ i_0 هي أقصى قيمة يصلها التيار. وهنا تكون الطاقة الكهربائية التي كانت مخزونة في المكثف قد تحولت كلها إلى طاقة مغناطيسية مخزونة في الملف. ونتيجة للتغير الحاصل في المجال المغناطيسي للملف تتولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية فيه تؤدي إلى إعادة شحن المكثف بالاتجاه المضاد. أي تشحن صفيحة المكثف اليسرى بشحنة سالبة وصفيحته اليمنى بشحنة موجبة. وتزداد هذه الشحنة على كل من صفيحتي المكثف مع تزايد التيار وتناقص طاقة الملف بالتالي، حتى تصل إلى قيمة مساوية لقيمتها الأصلية (q_0)، وبذلك تتحول الطاقة المغناطيسية إلى طاقة كهربائية مرة أخرى.

ثم يعود المكثف ليفرغ شحنته (طاقته) خلال الملف الذي يختزن الطاقة، ثم يُفرّغها عند اضمحلال مجاله المغناطيسي إلى المكثف. وهكذا تستمر عملية تبادل الطاقة المغناطيسية (المخزونة في الملف)، مع الطاقة الكهربائية (المخزونة في المكثف) بحيثُ يبقى مجموعهما عند أية لحظة مقداراً ثابتاً، انظر الشكل (11-10). وتستمر هذه العملية إلى مالانهاية في هذه الدارة طالما أنّه لا يوجد وسيلة لتبديد الطاقة على شكل حرارة مثلاً. ويتم ضياع الطاقة عادة خلال مقاومة الملف ومقاومة أسلاك التوصيل.

وتشبه حالة تبادل الشحنة المتكررة هنا حالة تذبذب البندول البسيط (simple pendulum)، حيثُ تتحول طاقة الوضع له إلى طاقة حركة ثم تتحول طاقته الحركية إلى طاقة وضع، ويستمر على هذا الحال المتذبذب بصورة دائمة دون توقف إذا أهمل تأثير الاحتكاك. ولذلك تدعى دارة LC بالدارة المتذبذبة أو دارة الرنين (resonance circuit).

ويُمكن حساب تردد الدارة، أي عدد مرات تبادل الطاقة بين L و C في الثانية بتطبيق قانون كيرشوف الثاني على الدارة وحل المُعادلة الناتجة، على النحو التالي:

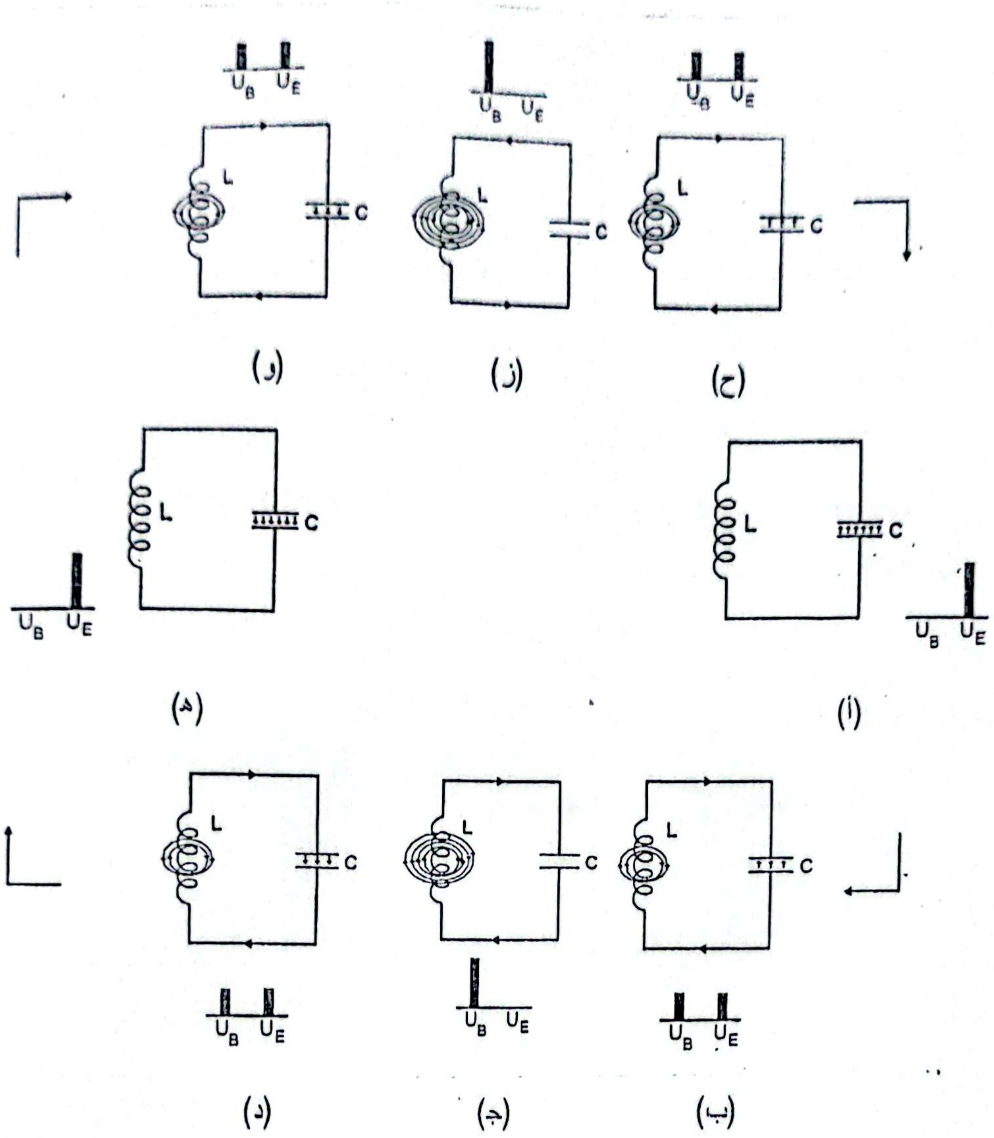
$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

وبالتعويض في هذه المعادلة عن التيار المار في الدارة والذي يساوي:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

فإنّ المعادلة السابقة تصبح:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (11\text{-}35)$$



الشكل (11-10)

وتُمثّل هذه المعادلة التفاضلية، معادلة حركة توافقية بسيطة (simple harmonic motion)، وحلها يُكتب على النحو التالي:

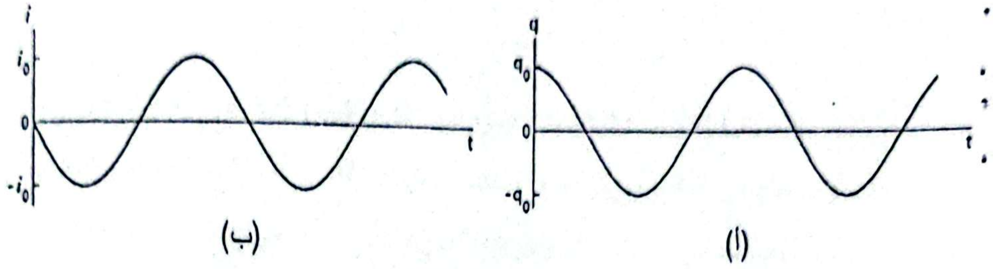
$$q(t) = q_0 \cos \omega t \tag{36-11}$$

حيثُ تُمثّل q_0: شحنة المكثف القصوى، و q: شحنة المكثف عند اللحظة t و ω التردد الزاوي والذي يساوي $2\pi f$ حيثُ f التردد. ويُمكن إيجاد التيار المار في الدارة بإيجاد المشتقة الأولى للمعادلة (11-36). أي أنَّ:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin \omega t = i_0 \sin \omega t \tag{37-11}$$

حيثُ تُمثّل i_0 أقصى تيار يُمكن أن يمر في الدارة ويساوي $-\omega q_0$. ويكون التيار المار في الدارة هنا

متردداً، أي يتغير مقداره واتجاهه بتغير الزمن t. ويُمثّل الشكل (11-11 أ)، تغير الشحنة مع الزمن. كما يُمثّل الشكل (11-11 ب)، تغير التيار مع الزمن.



الشكل (11-11)

وللتحقق من أنّ المعادلة (11-36)، تُمثّل الحل الصحيح للمعادلة (11-35)، نعوض عن q وعن المشتقة الثانية لها بالنسبة للزمن في تلك المعادلة، أي أنّ:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\omega^2 q_0 \cos\omega t$$

وعليه تصبح المعادلة (11-35) كما يلي:

$$-\omega^2 q_0 \cos\omega t + \frac{q_0}{LC}\cos\omega t = 0$$

أي أنّ:

$$-\omega^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

ومنها فإنّ:

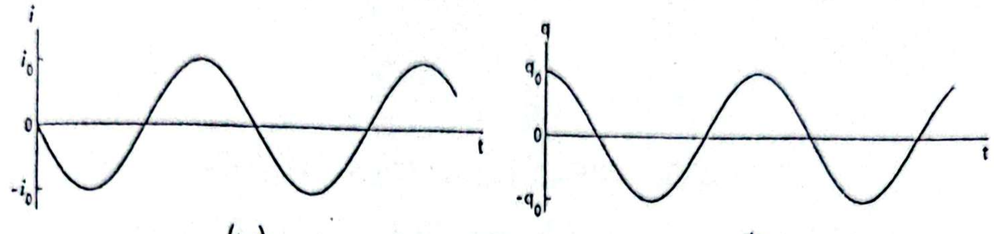
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (38\text{-}11)$$

وبما أنّ التردد الزاوي ω يساوي $2\pi f$ فإنّ التردد f يكون:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (39\text{-}11)$$

نستنتج مما سبق أنّ الشحنات الكهربائية تتحرك بتردد معين (f)، وينتج عن ذلك تغيرات دورية في المجال المغناطيسي حول الملف، وهذه التغيرات أيضا تنتج مجالا كهربائيا في نفس المنطقة. ويبقى المجالان متلازمين، لأنّ أحدهما يولد الآخر. ويطلق على هذين المجالين المتلازمين اسم **المجال الكهرومغناطيسي** (electromagnetic field). ونظرا لتذبذب الطاقة بين صورتيها الكهربائية والمغناطيسية، فإنّ هذا المجال الكهرومغناطيسي يكون مترددا بنفس التردد f، وتنتشر هذه التغيرات أو التذبذبات في المجال الكهرومغناطيسي في الفضاء بسرعة الضوء (3×10^8 m/s) على هيئة أمواج تسمى **الأمواج الكهرومغناطيسية** (electromagnetic waves).

متردداً، أي بتغير مقداره واتجاهه بتغير الزمن t. ويُمثّل الشكل (11-11 أ)، تغير الشحنة مع الزمن. كما يُمثّل الشكل (11-11 ب)، تغير التيار مع الزمن.



الشكل (11-11)

وللتحقق من أنّ المعادلة (11-36)، تُمثّل الحل الصحيح للمعادلة (11-35)، نعوض عن q وعن المشتقة الثانية لها بالنسبة للزمن في تلك المعادلة، أي أنّ:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\omega^2 q_0 \cos \omega t$$

وعليه تصبح المعادلة (11-35) كما يلي:

$$-\omega^2 q_0 \cos \omega t + \frac{q_0}{LC} \cos \omega t = 0$$

أي أنّ:

$$-\omega^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

ومنها فإنّ:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (38\text{-}11)$$

وبما أنّ التردد الزاوي ω يساوي $2\pi f$ فإنّ التردد f يكون:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (39\text{-}11)$$

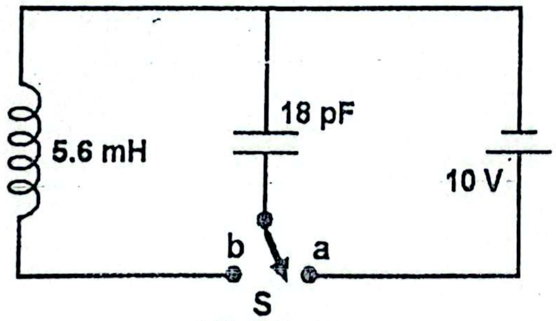
نستنتج مما سبق أنّ الشحنات الكهربائية تتحرك بتردد معين (f)، وينتج عن ذلك تغيرات دورية في المجال المغناطيسي حول الملف، وهذه التغيرات أيضا تنتج مجالا كهربائيا في نفس المنطقة. ويبقى المجالان متلازمين، لأنّ أحدهما يولد الآخر. ويطلق على هذين المجالين المتلازمين اسم المجال الكهرومغناطيسي (electromagnetic field). ونظرا لتذبذب الطاقة بين صورتيها الكهربائية والمغناطيسية، فإنّ هذا المجال الكهرومغناطيسي يكون مترددا بنفس التردد f، وتنتشر هذه التغيرات أو التذبذبات في المجال الكهرومغناطيسي في الفضاء بسرعة الضوء (3×10^8 m/s) على هيئة أمواج تسمى الأمواج الكهرومغناطيسية (electromagnetic waves).

ومن الناحية العملية لا تستمر الحركة الاهتزازية للشحنات الكهربائية في الدارة السابقة لزمن طويل، وذلك بسبب ضياع جزء من الطّاقة في الأسلاك المصنوع منها الملف وأسلاك التوصيل على شكل حرارة، مما يؤدي إلى نقصان الطاقة المتذبذبة واضمحلالها أو خمودها بشكل تدريجي كما سنبين في البند القادم.

في دارة LC تتذبذب الطاقة بين صورتيها الكهربائية والمغناطيسية والمجال الكهرومغناطيسي الناتج يكون مترددا بنفس التردد وتنتشر هذه التذبذبات في المجال الكهرومغناطيسي في الفضاء بسرعة الضوء على هيئة أمواج تسمى الأمواج الكهرومغناطيسية.

مثال (11-9)

وُصِل مكثف مواسعته 18 pF، وملف محاثته 5.6 mH، وبطارية 10 V، ومفتاح S على النحو المبين في الشكل (11-12). شُحن المكثف بوصل المفتاح S مع النقطة a لمدة طويلة، ثم فُصِل المفتاح S ووُصِل مع النقطة b.



الشكل (11-12)

أوجد: (أ) تردد التذبذب في الدارة. (ب) الشحنة القصوى على المكثف. (جـ) أقصى تيار يمر في الدارة. (د) التيار المار في الدارة بدلالة الزمن. (هـ) الشحنة على المكثف بدلالة الزمن. (و) الطاقة القصوى التي يُمكن تخزينها في الدارة. (ز) مثل الطاقة المختزنة في الملف والطاقة المختزنة في المكثف بدلالة الزمن بيانياً.

الحل:

(أ) يُمكن إيجاد تردد التذبذب بتطبيق المعادلة (11-39)، على النحو التالي:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\times3.14\times\sqrt{5.6\times10^{-3}\times18\times10^{-12}}} = 502\ \text{kHz}$$

حيثُ ترمز kHz هنا إلى كيلوهيرتز ($1\ \text{kHz} = 10^3\ \text{Hz}$).

(ب) الشحنة القصوى على المكثف تساوي:

$$q_0 = \varepsilon C = 10\times 18\times 10^{-12} = 1.8\times 10^{-10}\ C = 0.18\ nC$$

(ج) أقصى تيار يمر في الدارة يساوي:

$$i_0 = \omega q_0 = 2\pi f q_0 = 2\times 3.14\times 502\times 10^3\times 1.8\times 10^{-10}$$

$$= 5.68\times 10^{-4}\ A = 568\ \mu A$$

(د) يُمكن إيجاد التيار الكهربائي المار في الدارة بدلالة الزمن وذلك بتطبيق المعادلة (11-37)، على النحو التالي:

$$i(t) = i_0 \sin \omega t = -568 \sin \omega t\ (\mu A)$$

(هـ) تُعطى الشحنة على المكثف عند أية لحظة زمنية t بالمعادلة (11-36)، أي أنّ:

$$q(t) = q_0 \cos \omega t = 1.8\times 10^{-10} \cos \omega t\ (C)$$

(و) الطاقة القصوى المختزنة في الدارة = الطاقة القصوى المخزنة في المكثف = الطاقة القصوى المختزنة في الملف = مقدار ثابت.

أي أنّ:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\times\frac{(1.8\times 10^{-10})^2}{18\times 10^{-12}} = 9\times 10^{-10}\ J$$

$$U_B = \frac{1}{2}L i_0^2 = \frac{1}{2}\times 5.6\times 10^{-3}\times(5.68\times 10^{-4})^2 = 9\times 10^{-10}\ J$$

(ز) تُعطى الطاقة المخزنة في الملف بالعلاقة التالية:

$$U_L = \frac{1}{2}L i^2$$

وبالتعويض عن i من المعادلة (11-37) ينتج أنّ:

$$U_L = \frac{1}{2}L i_0^2 \sin^2 \omega t$$

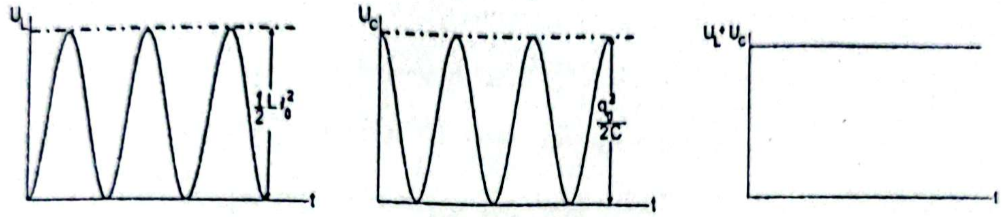
وتُعطى الطاقة المختزنة في المكثف بالعلاقة التالية:

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

وبالتعويض عن q من المعادلة (11-36) ينتج أنّ:

$$U_C = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2 \omega t$$

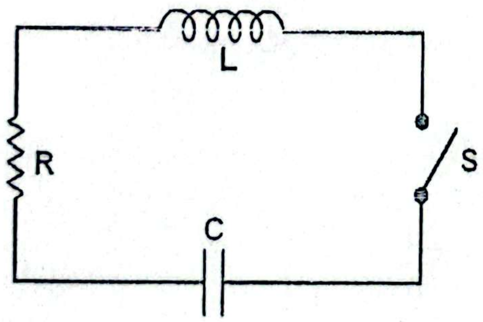
ويبين الشكل (11-13) تمثيلاً بيانياً للطاقة المختزنة في الملف U_L، والطاقة المختزنة في المكثف U_C، ومجموع الطاقتين المخزنتين في المكثف والملف $(U_C + U_L)$. وتلاحظ من الشكل أنّ مجموع طاقتي المكثف يبقى ثابتاً مع مرور الزمن (على افتراض عدم وجود أية مقاومة للدارة)، فعندما تكون U_C أقصى ما يُمكن تكون U_L أصغر ما يُمكن والعكس صحيح.



الشكل (11-13)

□ 11-9 دارة مقاومة ومِحَث ومكثف (RLC - circuit)

لقد ناقشنا في البند السابق دارة تذبذب مثالية (LC)، حيثُ أهملنا قيمة أي مقاومة يُمكن أن تعمل على تخميد التذبذب. ومن الناحية العملية لا بد من وجود مقاومة في الدارة، حتى ولو كانت قيمتها صغيرة. وتتمثّل هذه المقاومة بأسلاك الملف أو أسلاك التوصيل. فإذا مثلنا المقاومة الكلية في دارة LC العملية بالرمز R، تصبح الدارة الجديدة كما هو مبين في الشّكل (11-14).



الشكل (11-14)

ولنفترض أنّ المكثف C شحن من مصدر خارجي بشحنة q_0، ثم وُصِل المفتاح S باللحظة $t = 0$. وبما أنّه يوجد مقاومة R في الدارة، فإننا نتوقع تحول بعض الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية تتبدد في المقاومة R. ولذلك فإنّ من المتوقع أن تتضاءل الطاقة الكهرومغناطيسية تدريجيا في الدارة بسبب تحول جزء منها إلى حرارة خلال المقاومة R. وبالتالي فإنّ R تعمل على تخميد تذبذب الدارة بشكل تدريجي. وبتطبيق قانون كيرشوف الثاني على الدارة نحصل على

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \qquad (11\text{-}40)$$

حيثُ تُمثّل i و q التيار المار في الدارة والشحنة على المكثف على الترتيب عند اللحظة t. وحيثُ أنّ:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \text{ و } i = \frac{dq}{dt}$$

فإنّ المعادلة (11-40)، تصبح على النحو التالي:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية، ويُعطي حلُها الشحنة q بدلالة الزمن t. وسنكتفي بإعطاء نتائج حل هذه المعادلة ومناقشتها دون الخوض بتفاصيل الحل. فهناك ثلاثة حلول للمعادلة (40-11)، يُعطي كل حل منها الشحنة q بدلالة الزمن t ويعتمد كل حل على مقدار المقاومة R في الدارة. فإذا كانت المقاومة R تساوي صفرا، فإنّ المعادلة (40-11) تؤول إلى معادلة التذبذب المثالي أو التذبذب غير المخمَّد (undamped oscillation). ولقد تم وصف هذا النوع من التذبذب في دارة LC في البند السابق.

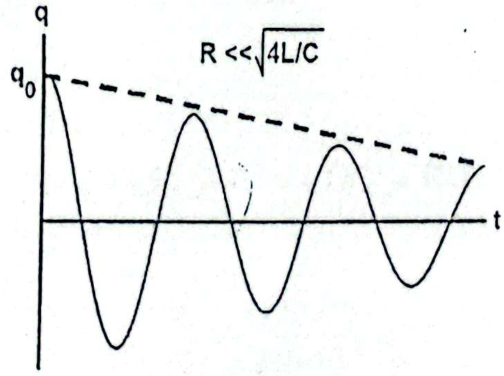
أما إذا كانت المقاومة في الدارة لا تساوي صفرا، فيوجد للمعادلة التفاضلية حلان هما:

1. حالة التخميد الخافت (underdamped oscillation)

ويرتبط هذا الحل بكون $R^2 < 4L / C$. ويطلق على هذه الحالة اسم ()، وتُعطى الشحنة q بدلالة الزمن t بالعلاقة:

$$q=q_0\,e^{Rt/2L}\cos\left(t/\sqrt{LC}\right) \qquad (41\text{-}11)$$

وتختلف هذه المعادلة عن معادلة التذبذب في دارة LC (المعادلة 36-11)، باحتوائها على المعامل $e^{-Rt/2L}$. وهذا المعامل هو الذي يؤدي إلى اضمحلال الشحنة بمرور الزمن، كما هو مبين في الشكل (15-11).



الشكل (15-11)

2. حالة التخميد الفائق (overdamped oscillation)

ويرتبط الحل الثاني للمعادلة (40-11) بكون $R^2 > 4\ L/C$. ويطلق على هذه الحالة اسم حالة التخميد الفائق. ويحدث في هذه الحالة تبديد الطاقة الكهرومغناطيسية بشدة هائلة في المقاومة R دون أن يتاح لها أن تتذبذب بين المكثف والملف.

أما إذا كانت $R^2 >> 4L/C$ فإنّ الدارة تتصرف وكأنها مكثف C يتم تفريغ شحنته خلال المقاومة R. لذا فإنّ الشحنة q تُعطى بدلالة الزمن بالمعادلة المألوفة لديك وهي:

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} \quad ; \quad (R^2 >> 4\,L/C) \qquad (42\text{-}11)$$

وللتغلب على فقدان الطاقة خلال مقاومة البحث وأسلاك التوصيل لدارة RLC، يتم تزويد الدارة بقدرة كهربائية من مصدر خارجي بمعدل مستمر. حيثُ توصل الدارة مع مفتاح الكتروني خاص (ترانزيستور مثلا)، إلى مصدر قدرة، ويقوم المفتاح الخاص بتزويد الدارة بالقدرة الكهربائية بمعدل يماثل ترددها، حيثُ يعوضها عن كل جزء يضيع من الطاقة. ويُمكن معرفة المزيد عن هذا الأمر بالرجوع إلى كتب الإلكترونيات المناسبة.

في دارة RLC يتأثر تذبذب الطاقة الكهرومغناطيسية بوجود المقاومة.

إذا كانت قيمة المقاومة R بحيث أنَّ $R^2 < 4\,L/C$ في دارة RLC فإنَّ تذبذب الشحنة يضمحل فيها بشكل أسي وتُسمَّى الدارة في هذه الحالة دارة التخميد الخافت.

إذا كانت قيمة المقاومة R بحيث أنَّ $R^2 > 4\,L/C$ في دارة RLC فإنَّ الطاقة الكهرومغناطيسية تتبدَّد بشدة هائلة في المقاومة دون أنْ يُتاح لها أنْ تتذبذب بين المكثف والملف. وتُسمَّى الدارة في هذه الحالة دارة التخميد الفائق.

■ مثال (11-10)

وُصِل ملفٍ محاثته 20 mH ومقاومته 2 Ω فجأة على التوالي مع مكثف مواسعته 2.2 μF مشحون من مصدر جهد قدره 12 V. (أ) أثبت أنَّ هذه الدارة ستتذبذب. (ب) ما الزمن اللازم لكي تتضاءل الشحنة الابتدائية على المكثف إلى النصف؟

الحل:

(أ) إن شرط التذبذب في دارة RLC هو $R^2 > 4\,L/C$ (أو $R^2 < 4\,L/C$). وبحساب 4L/C للدارة نجد أنَّها تساوي:

$$\frac{4L}{C} = \frac{4 \times 20 \times 10^{-3}}{2.2 \times 10^{-6}} = 36364\ \Omega^2$$

وهذه القيمة أكبر بكثير من R^2 ($R^2 = (2\ \Omega)^2 = 4\ \Omega^2$). لذا فإنَّ الدارة تحقق شرط التذبذب وبالتالي تتذبذب.

(ب)يُمكن إيجاد الزمن اللازم لكي تتضاءل الشحنة q_0 إلى النصف بتطبيق المعادلة (11-41) على النحو التالي:

$$e^{-Rt/2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-2\times t/(2\times 20\times 10^{-3})} = \frac{1}{2}$$

ومنها نجد أنَّ: $t \approx 14\ \text{ms}$

ملخص الفصل الحادي عشر

1. المِحَث هو نبيطة كهربائيَّة، وأفضل مثال عليه هو الملف، يُحثُّ تحت تأثير تغير التدفق المغناطيسي خلاله ويتولد به تيار تأثيري (أي تيار مستحث).

2. تُختزن الطاقة الكهرومغناطيسية في المُحاثات ولهذا فهي تلعب دوراً مُشابهاً لدور المكثفات في تخزين الطاقة الكهربائيَّة.

3. الحث الذاتي هو تولد قوة دافعة كهربائية تأثيرية في دارة مغلقة.

4. تُعطى المُحاثَّة الذاتيَّة L بالعلاقة: $L = -\varepsilon/di/dt$، أي أنها تُساوي النسبة بين القوة الدافعة الكهربائية التأثيريَّة ومعدل تغير التيار الكهربائي الذي ولَّد هذه القوة الدافعة الكهربائية.

5. المُحَاثَّة الذاتية خاصية ذاتية للمِحث تعتمد على شكله الهندسي والمواد الموجودة فيه (أو حوله) فقط.

6. تُعطى المُحَاثَّة الذاتية لملف لولبي طويل مساحة مقطعه A وطوله l ويحتوي على n لفة لكل وحدة طول بالعلاقة:

$$L = \mu_0 n^2 l A$$

7. تُعطى مُحَاثَّة ملف إطاري يحتوي على N لفة، نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2، ومقطعه على شكل مستطيل ارتفاعه h بالعلاقة:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \left(\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\right) \ln\frac{R_2}{R_1}$$

8. إذا كانت ε_1 هي القوة الدافعة التأثيريَّة المتولدة في مِحَث L_1 يمر به تيار شدته i_1 الناتجة عن وضعه قرب مِحَث آخر L_2 يمر به تيار شدته i_1 وإذا كانت ε_2 هي القوة الدافعة التأثيريَّة المتولدة في المِحَث L_2 فإنَّ المُحَاثَّة المتبادلة بينهما تُعطى بالعلاقة:

$$M = -\frac{\varepsilon_1}{di_2/dt} = -\frac{\varepsilon_2}{di_1/dt}$$

9. عند وصل المُحاثَّات على التوالي أو التوازي فإنَّه ينطبق عليها ما ينطبق على المقاومات بشرط افتراض أنَّ المُحاثَّات لا تؤثر على بعضها.

10. يتغير التيار i المار في دارة مِحَث (L) ومقاومة (R) موصولين مع مصدر جهد ε أسيًا مع الزمن حسب العلاقة:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = i_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

حيثُ τ ثابت يساوي $\frac{L}{R}$، ويعرف بثابت الزمن الحثي.

11. يتغير التيار i المار في دارة محث (L) ومقاومة (R) موصولين معا (بدون وجود مصدر جهد) مع الزمن حسب العلاقة:

$$i(t) = i_0 \; e^{-t/\tau}$$

حيث $\tau = \frac{L}{R}$ ، ثابت الزمن الحثي لهذه الدارة.

12. تتناسب كثافة الطاقة المغناطيسية الحجمية في نقطة ما في الفراغ طرديا مع مربع قيمة شدة المجال المغناطيسي في تلك النقطة.

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

11. تتذبذب الطاقة في دارة LC بين صورتيها الكهربائية والمغناطيسية ويكون المجال الكهرومغناطيسي الناتج مترددا بنفس التردد وتنتشر هذه التذبذبات في المجال الكهرومغناطيسي في الفضاء بسرعة الضوء على هيئة أمواج تسمى الأمواج الكهرومغناطيسية.

12. استنتج ماكسويل أنه وبما أنّ الأمواج الكهرومغناطيسية تسير بسرعة الضوء فإنّ الضوء عبارة عن أمواج كهرومغناطيسيّة.

13. يتأثر تذبذب الطاقة الكهرومغناطيسية في دارة LC بوجود مقاومة الأسلاك ومادة الملف والمكثف (وتُدرس الدارة وكأنّها دارة RLC).

14. إذا كانت قيمة المقاومة R بحيث أنّ $R^2 < 4\ L/C$ في دارة RLC فإنّ تذبذب الشحنة في الدارة يضمحل فيها بشكل أسي حسب العلاقة:

$$q = q_0 \, e^{Rt/2L} \cos\left(t/\sqrt{LC}\right)$$

وتُسمّى الدارة في هذه الحالة دارة التخميد الخافت.

15. إذا كانت قيمة المقاومة R بحيث أنّ $R^2 > 4\ L/C$ في دارة RLC فإنّ الطاقة الكهرومغناطيسية تتبدّد بشدة هائلة في المقاومة دون أنْ يُتاح لها أنْ تتذبذب بين المكثف والملف. وتُعطى الشحنة في الدارة بدلالة الزمن في هذه الحالة بالعلاقة:

$$q(t) = q_0 \, e^{-t/RC} \quad ; \quad (R^2 >> 4\ L/C)$$

وتُسمّى الدارة في هذه الحالة دارة التخميد الفائق.

تمارين

1: يمر تيار i يُعطى بالعلاقة $i = 2 \sin 10t$ (A) خلال محث محاثته 15 mH. إنّ القوة الدافعة التأثيرية العكسية المتولدة في المحث عند اللحظة $t = 0.5$ s تساوي تقريبا:

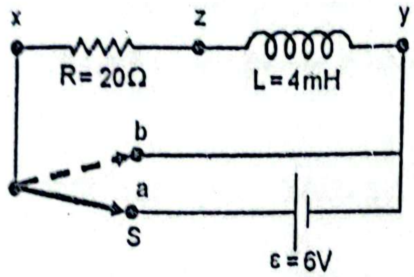
أ) 57 mV　ب) 85 mV　جـ) 113 mV　د) 142 mV

2: أُدخل لب حديدي داخل ملف لولبي طوله 60 cm، ومساحة مقطعه $5\ cm^2$ ويحتوي على 1000 لفة. إذا علمت أنّ ثابت إنفاذية الحديد μ_{Fe} يساوي $3000\ \mu_0$ فإنّ مُحاثة الملف تساوي:

أ) 3.14 H　ب) 6.28 H　جـ) 9.42 H　د) 12.56 H

3: أغلق المفتاح S في الشكل المجاور عند النقطة a في اللحظة $t = 0$.

إنّ أقصى قيمة للتيار في الدارة تساوي:



أ) 0.6 A　ب) 0.4 A　جـ) 0.5 A　د) 0.3 A

4: في السؤال السابق، إنّ فرق الجهد بين طرفي الملف (V_{zy}) عند اللحظة $t = 0.4$ ms يساوي:

أ) 0.16 mV　ب) 0.4 V　جـ) 160 nV　د) 1.84 mV

5: في السؤال 3؛ بعد فترة طويلة من غلق المفتاح عند a يُغلق المفتاح S فجأة عند b. إنّ اتجاه التيار الذي سيسري في الدارة RL المغلقة سوف يكون من:

أ) y إلى x　ب) x إلى y　جـ) a إلى b　د) y إلى a

6: إذا مر تيار شدته 2 A في كيبل من نوع متحد المحور في أسطوانته الداخليّة، التي نصف قطرها 0.1 cm وأكمل دورته في قشرته الخارجيّة، والتي نصف قطرها يساوي 0.5 cm، فإنّ الطاقة المغناطيسية المختزنة في وحدة الطول من الكيبل، بوحدة μJ/m، تساوي:

أ) 0.08　ب) 0.16　جـ) 0.32　د) 0.64

7: تردد الرنين لدارة مثالية تحوي مُحاثة $L = 100$ mH ومكثفا مواسعته 5 μF يساوي:

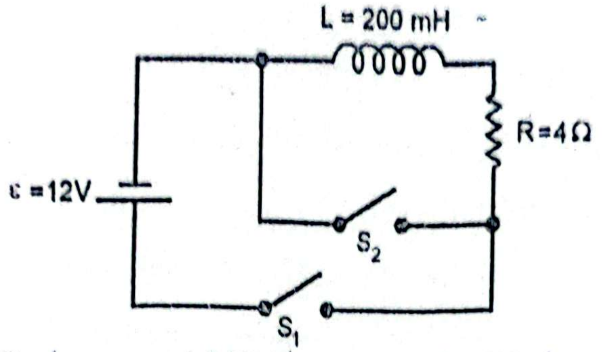
أ) 113 Hz　ب) 225 Hz　جـ) 375 Hz　د) 450 Hz

8: وُصِل محث ومقاومة وبطاريّة على التوالي في دارة مغلقة. إذا علمت أنّ التيار ينمو إلى ثلث قيمته القصوى في ثانيتين فإنّ ثابت الزمن الحثي للدارة يساوي:

أ) 2.5 s　ب) 3.7 s　جـ) 4.9 s　د) 6.2 s

9: إذا أغلق المفتاح S_1 وترك المفتاح S_2 غير مغلق في الدارة المبينة في الشكل التالي فإنّ

معدل تبديد الطاقة الحرارية في المقاومة بعد مضي $500\ \mu s$ من إغلاق الدارة يساوي:



أ) 0.7 mW   ب) 2.6 mW   جـ) 4.2 W   د) 8.4 W

10: وُصِل محثّ 40 mH ومقاومة $3\ \Omega$ ومكثف $6\ \mu F$ مشحون من مصدر جهد 12 V في دارة مغلقة. إنَّ الزمن اللازم لكي تنخفض الطاقة الكلية في الدارة إلى نصف قيمتها الابتدائية يساوي:

أ) 9.25 ms   ب) 18.50 ms   جـ) 37.00 ms   د) 46.25 ms

مسائل

1-11 يمر تيار i يُعطى بالعلاقة $i = 5 \sin 8t$ (A) خلال مِحثّ محاثته 15 mH. أوجد القوة الدافعة التأثيرية العكسية المتولدة في المحثّ بدلالة الزمن t.

2-11 ملف لولبي نصف قطره 2 cm وطوله 60 cm وعدد لفاته 500. ما مقدار محاثة الملف؟

3-11 يراد عمل مِحثّ محاثته $10\ \mu H$ على اسطوانة طولها 5 cm ونصف قطرها 0.4 cm ما عدد اللفات اللازمة؟ ما طول السلك اللازم؟

4-11 تولد جهد قدره 18 mV في ملف مكون من 400 لفة، في لحظة كانت شدة التيار المار في الملف عندها 3 A. إذا علمت أنَّ معدل تغير التيار بالنسبة للزمن في تلك اللحظة هو 10 A/s، فما التدفق الكلي للمجال المغناطيسي خلال الملف؟

5-11 يتغير التيار الكهربائي في مِحثّ 10 H بمرور الزمن وفقا للعلاقة $i = 3t^2 - 4t$ حيثُ تُمثّل t الزمن بالثواني و i التيار بالأمبير. (ا) احسب مقدار القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في المِحثّ في اللحظة $t = 0$ وكذلك في اللحظة $t = 2s$. (ب) عند أية قيمة للزمن t تكون القوة الدافعة الكهربائية المتولدة أقل ما يُمكن وما قيمتها؟

6-11 ملف لولبي طوله 50 cm ونصف قطره 2 cm، مكون من 400 لفة متراصة ملفوفة على لُب حديدي، ثابت إنفاذيته المغناطيسية $2800\ \mu_0$، لفَّ حوله ملف آخر مكون من 200 لفة بإحكام وبشكل متراص، ثم مُرِّر في الملف الأول تيار متناظم. إذا تناقص التيار من 5 A إلى

1 A خلال 80 ms بانتظام فاوجد (أ) القوة الدافعة التأثيرية المتولدة في الملف الثاني (ب) المُحَاثَة المتبادلة للملفين.

7-11 ملفان ثابتان محاثتهما المتبادلة 100 μH. مرَّ في أحد الملفين تيار i يُعطى بالمعادلة $i = i_0 \sin \omega t$. ما أكبر قوة دافعة كهربائية تتولد في الملف الثاني على افتراض أنّ $i_0 = 10$ A و $\omega = 1000$ rad/s؟

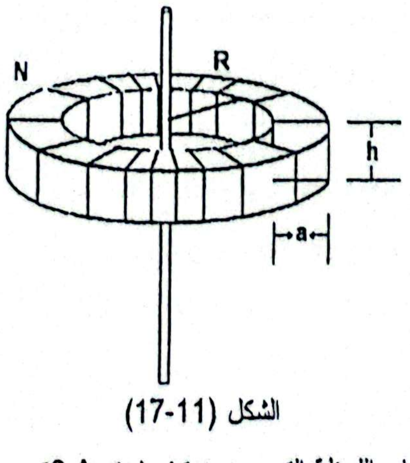
8-11 ملف لولبي طويل مكون من N_1 لفة ونصف قطره a، يحيط بملف لولبي آخر بنفس الطول عدد لفاته N_2 ونصف قطره b. إذا كان الملفان متحدين بالمحور، وكان طول كل منهما l، فما المُحَاثَة المتبادلة لهما M؟ احسب المُحَاثَة بافتراض أنّ تياراً i يمر في الملف الداخلي، ثم احسبها بافتراض أنّ التيار i يمر في الملف الخارجي. هل $M_{12} = M_{21}$؟

9-11 عروتان متحدتان بالمركز وتقعان في نفس المستوى، لنصف قطر الأولى R_1 والثانية R_2، حيثُ $R_1 << R_2$. أثبت أنّ محاثتهما المتبادلة تُعطى بالعلاقة $M = \mu_0 \pi R_1^2/2R_2$. ما قيمة محاثتهما المتبادلة عندما تكون $R_1 = 40$ cm و $R_2 = 3$ cm؟

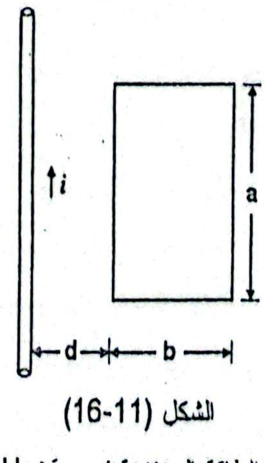
10-11 سلك مستقيم وطويل موضوع على بعد d من عروة مستطيلة طولها a وعرضها b بشكل موازٍ لأحد أضلاعها، كما في الشكل (11-16). احسب المُحَاثَة المتبادلة M بين السلك والعروة، على افتراض أنّ طول السلك أكبر بكثير من أبعاد العروة.

11-11 ينطبق محور سلك طويل ومستقيم على محور ملف إطاري عدد لفاته N ونصف قطره الداخلي R، كما في الشكل (11-17). إذا علمت أنّ مقطع الملف على شكل مستطيل طول قاعدته a وارتفاعه h، فاثبت أنّ المُحَاثَة المتبادلة بينهما M تُعطى بالمعادلة:

$$M = \left(\frac{\mu_0 N h}{2\pi}\right) \ln[(R+a)/R]$$



الشكل (11-17)



الشكل (11-16)

12-11 ما مقدار الطاقة المختزنة في محث 200 mH في اللحظة التي يمر به تيار شدته 2 A؟

13-11 إذا علمت أنّ شدة المجال المغناطيسي داخل ملف أولبي طوله 12 cm ونصف قطره 3 cm يساوي 0.7 T، فما القيمة التقريبية للطاقة المختزنة في المجال؟

14-11 كيبل طويل مكون من موصلين اسطوانيين متحدين بالمحور (coaxial cable). الأول منهما مصمت نصف قطره 1 cm، والثاني عبارة عن قشرة معدنية رقيقة واسطوانية نصف قطرها 3 cm تحيط بالأول. إذا مر تيار كهربائي شدته 10 A في الموصل الداخلي وأكمل دورته خلال القشرة، فأوجد: (أ) كثافة الطاقة الحجمية المخزونة في المجال المغناطيسي بين الموصلين. (ب) الطاقة الكلية المخزونة في المجال المغناطيسي بين الموصلين لكل وحدة طول. [استعن بالمثال (11-8)].

15-11 سلك معدني نصف قطره a ويمر به تيار شدته i. أوجد: (أ) كثافة الطاقة المغناطيسية على بعد a/2 عن المحور. (ب) الطاقة المغناطيسية الكلية المختزنة لكل وحدة طول في السلك. (جـ) كثافة الطاقة المغناطيسية على بعد 4a عن محور السلك.

16-11 وُصِل محِث ومقاومة وبطارية على التوالي في دارة مغلقة. إذا علمت أنّ التيار في الدارة ينمو إلى ربع قيمته القصوى في 3 ثوان فما ثابت الزمن الحثي (τ) للدارة؟

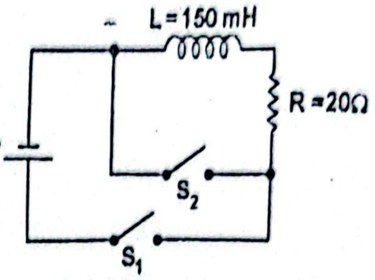
17-11 كم ثابتا زمنيا حثيا يستغرق الجهد بين طرفي مقاومة في دارة RL لكي ينخفض إلى 1% من قيمته الابتدائية؟

18-11 رُبط ملف 1.2 H ومقاومة 3 Ω ببطارية قوتها الدافعة الكهربائية 24 V. احسب: (أ) معدل تزايد التيار لحظة إغلاق الدارة. (ب) معدل تزايد التيار في اللحظة التي يصبح بها التيار 5 A (جـ) أقصى تيار يمر في الدارة. (د) قيمة التيار المار في الدارة بعد مرور 0.6 s من إغلاقها.

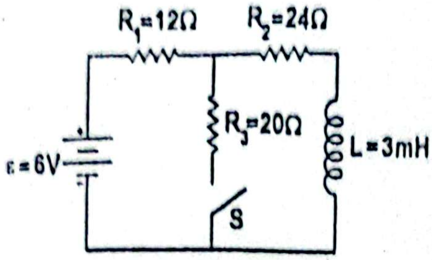
19-11 إذا أغلق المفتاح S_1 وترك المفتاح S_2 غير مغلق في الدارة المبينة في الشكل (11-18) فاحسب بعد مضي 500 μs من إغلاق الدارة: (أ) التيار المار في المقاومة. (ب) فرق الجهد بين طرفي المقاومة. (جـ) معدل تبديد الطاقة الحرارية في المقاومة. (د) الطاقة المغناطيسية المختزنة في المحِث.

20-11 في الشكل (11-18)، إذا أغلق المفتاح S_1 لفترة طويلة، ثم فتح ثانية وأغلق المفتاح S_2، فأوجد: (أ) التيار الذي يمر في الدارة لحظة إغلاق المفتاح S_2. (ب) الزمن الذي يستغرقه فرق الجهد بين طرفي المحِث حتى تنخفض قيمته إلى نصف ما كانت عليه قبل إغلاق المفتاح S_2. (جـ) التيار المار في الدارة بعد مرور 15 s على إغلاق المفتاح S_2.

21-11 أغلق المفتاح S في الدارة المبينة في الشكل (11-19) في اللحظة t = 0 ولفترة طويلة جدا. (أ) ما مقدار التيار المار في المحِث؟ (ب) ما مقدار القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية المتولدة



الشكل (18-11)



الشكل (19-11)

22-11 ما مواسعة المكثف اللازم ربطه مع محث 100 mH للحصول على دارة ترددها 2 kHz ؟

23-11 تستخدم دارة الرنين (LC) في المذياع (جهاز الراديو) لانتقاء المحطات. حيثُ يعمل مكثف متغير المواسعة ومتصل مع ملف على انتقاء المحطات المطلوبة. (أ) إذا كانت مواسعة المكثف المتغير 1000 pF عندما كان الجهاز يلتقط إذاعة عمّان التي ترددها 801 kHz فما محاثة الملف المستخدم في دارة الرنين. (ب) إذا تغيرت مواسعة المكثف فأصبحت 1200 pF فما تردد المحطة الجديدة التي يستقبلها المذياع؟

24-11 وُصِل محث 40 mH ومقاومة 3 Ω، ومكثف 6 μF مشحون من مصدر جهد 10 V في دارة مغلقة. (أ) هل تهتز هذه الدارة؟ (ب) ما الزمن اللازم لكي تنخفض الطاقة الكلية في الدارة إلى نصف قيمتها الابتدائية؟

الفصل الثاني عشر

داراتُ التيَّار المتردِّد

Alternating Current Circuits

الفصل الثاني عشر

دارات التيار المتردد

(Alternating Current Circuits)

□ 1-12 تمهيد

تعرفنا في الفصلين السابع والحادي عشر على خصائص الدارات الكهربائية المحتوية على مقاومات ومكثفات ومحثات ومصادر مستمرة للقوة الدافعة الكهربائية (dc sources of emf) كما تعرفنا على خصائص دارة RC المحتوية على مقاومة ومكثف مشحون (أو دارة تفريغ المكثف)، وعلى خصائص دارة RLC ودارة LC، والاهتزاز المتولد فيهما. وسنتعرف في هذا الفصل على سلوك عناصر الدارات آنفة الذكر عند وصلها مع مصادر مترددة للقوة الدافعة الكهربائية (ac sources of emf).

إنَّ لدارات التيار المتردد (ac circuits) الناتج عن استخدام مصدر متردد هذه أهمية كبرى، لأنَّ معظم الكهرباء المُولَدة تكون من النوع المتردد، كما رأينا عند مناقشتنا لموضوع المُولِّد الكهربائي في الفصل العاشر. أضف إلى ذلك أنَّ لدارات التيار المتردد تطبيقات عملية عديدة وهامة في مختلف ميادين العلوم والتقنية الحديثة وفي حياتنا اليومية. وتُعدُّ مصادر القوة الدافعة الكهربائية والمقاومات والمكثفات والمحثات من العناصر الأساسية لهذه الدارات، كما هو الحال في دارات التيار المستمر، غير أنَّ القوة الدافعة الكهربائية في حالة دارات التيار المتردد تتغير بشكل دوري (منتظم) مع الزمن.

□ 2-12 التيار المتردد (Alternating Current)

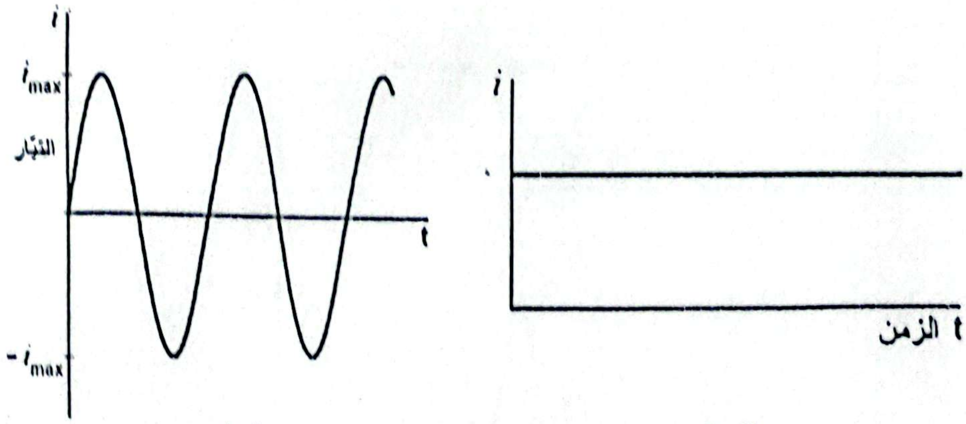
عند توصيل مصدر مستمر لقوة دافعة كهربائية أو بطارية في دارة كهربائية مغلقة، فإنَّ تياراً يسري في الدارة باتجاه محدد بشكل ثابت ومستمر من الطرف ذي الجهد الأعلى إلى الطرف ذي الجهد الأدنى، كما بيَّنا في الفصل السابع. ويُطلَق على هذا التيار اسم التيار المستمر أو المباشر (direct current أو dc) انظر الشكل (12-1 أ). من جهة أخرى، عند توصيل مُولِّد كهربائي (electric generator) في دارة كهربائية فإنَّ القوة الدافعة الكهربائية الناتجة تكون مترددة أو متغيرة، كما بيَّنا في الفصل العاشر، وتُعطى هذه القوة الدافعة الكهربائية بالمعادلة:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \qquad (1\text{-}12)$$

[انظر المعادلتين (10-11) و(10-12)]حيث تُمثِّل ε_0 القيمة العظمى للقوة الدافعة الكهربائية للمُولد

وتُمثّل ω التردد الزاوي لدوران المُولّد بالزوايا نصف القُطرية وأخيراً تُمثّل t الزمن. وكما يتضح من المعادلة (1-12) فإنّ الجهد المتردد يعكس اتجاهه عدة مرات في فترة معينة من الزمن، ويتغير مقداره وفقاً لاقتران جيبي (sine function) ويسلك التيار المتردد الناتج عن هذا الجهد نفس السلوك حيث يتغير وفقاً لاقتران جيبي كما في الشكل (1-12 ب).

ونلاحظ من المعادلة (1-12) إن الجهد الكهربائي لمصدر القوة الدافعة الكهربائية المترددة (كالمُولّد مثلاً) يتذبذب بين قيمتين هما $+\varepsilon_{max}$ و $-\varepsilon_{max}$ وتعرف ε_{max} باسم جهد الذروة (peak voltage) ويرمز لها في كثير من الأحيان بالرمز V_p أو الرمز V_0. ونلاحظ كذلك من الشكل (1-12 ب) أنّ التيار المتردد الناتج عن المصدر المتردد يتذبذب بين قيمتين هما i_{max} + و $-i_{max}$. ويُعرف باسم تيار الذروة (peak current) ويُرمز له في كثير من الأحيان بالرمز i_p أو الرمز i_0.



ac (ب) dc (أ)

الشكل (1-12)

ويُطلق على عدد الذبذبات (أو الدورات) الكاملة التي يُتمها الجهد أو التيار في الثانية الواحدة اسم التردد (frequency) ويرمز له بالرمز f. وتقوم شركات الكهرباء في الأردن وفي معظم دول الشرق الأوسط وأوروبا بتزويد الكهرباء بتردد f يساوي 50 Hz أما في امريكا وكندا فقيمة f تساوي 60 Hz. وترتبط f مع التردد الزاوي ω بالمعادلة:

$$\omega = 2\pi f \qquad (2\text{-}12)$$

ويُسمّى معكوس التردد الدورة (period)، ورمزه T، اي أنّ:

$$T = 1/f = 2\pi/\omega$$

لنفترض أنّ مصدر جهد متردد V قد وصل مع مقاومة R في دارة مغلقة. إن التيار i المار في الدارة يُعطى حسب قانون أوم على النحو التالي:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t = i_0 \sin\omega t \qquad (3\text{-}12)$$

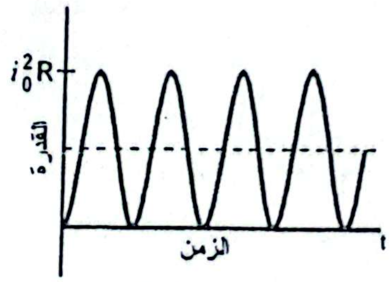
حيث يُمثّل i_0 قيمة التيار القصوى المار في الدارة. ويُعَدُّ التيار المار في الدارة موجباً عندما تسري

الإلكترونات فيها باتجاه معين وسالبا عندما تسري تلك الإلكترونات بالاتجاه المعاكس. ويتضح من الشكل (1-12 ب) أنَّ التيار المتردد يكون موجبا نصف الوقت وسالبا نصفه الآخر. بمعنى أنَّ التيار المتوسط يساوي صفرا. ولا يعني هذا بالطبع أنه لا يلزم قدرة كهربائية، أو أنه لا تتولد حرارة في المقاومة، إذ أنَّ الإلكترونات تتحرك جيئة وذهابا في المقاومة وتولد بالتالي حرارة فيها. وفي الواقع فإنَّ القدرة الكهربائية P المغذاة في المقاومة R والمبدِّدة على شكل حرارة في أية لحظة زمنية تُعطى بالمعادلة:

$$P = i^2R = i_0^2 R \sin^2\omega t \qquad (4\text{-}12)$$

وبما أنَّ قيمة التيار مربعة في معادلة القدرة السابقة، فإنَّ القدرة تكون موجبة دائما كما هو موضح في الشكل (2-12). وتتغير الكميَّة $\sin^2\omega t$ بين 0 و 1 ولذا فإنَّ متوسط تلك الكميَّة يساوي $\frac{1}{2}$. وبالتالي يُعطى متوسط القدرة (average power) بالمعادلة:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} i_0^2 R = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} \qquad (5\text{-}12)$$



الشكل (2-12)

إنَّ القيمة المتوسطة لمربع التيار أو الجهد هي القيمة المهمة في حسابات متوسط القدرة الكهربائية، أي أنَّ:

$$\overline{i^2} = \frac{1}{2} i_0^2 \quad \text{و} \quad \overline{V^2} = \frac{1}{2} V_0^2$$

ويُطلق على الجذر التربيعي للقيمة المتوسطة هذه اسم قيمة جذر متوسط المربعات (ج.م.م) (root mean square أو rms) للتيار أو الجهد، ويرمز لها بالرمز i_{rms} و V_{rms} على الترتيب، حيث:

$$i_{rms} = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0 \qquad (6\text{-}12)$$

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \qquad (7\text{-}12)$$

وتُعرف قيمة ج.م.م (rms) هذه في كثير من الأحيان باسم القيمة الفعالة

(effective value) للتيار أو الجهد، وتعدُّ قيمتا ج.م.م للتيار والجهد من القيم الهامة في الكهرباء، لأنَّ هاتين القيمتين تستخدمان في معادلات القدرة للحصول على متوسط القدرة مثل:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} i_0^2 R = i_{rms}^2 R \qquad (8\text{-}12)$$

وهكذا يُمكننا القول بأنَّ التيار المستمر الذي تساوي قيمتا i و V له قيمتي i_{rms} و V_{rms} لتيار متردد يُنتج نفس القدرة مثل هذا التيار المتردد. لذلك فإنَّ قيمة rms هي التي تُعطى عادة من الشركات الصانعة. فمثلاً عند القول بأنَّ الجهد الكهربائي المتردد في الأردن هو 220 V فإنَّ المقصود هو قيمة ج.م.م للجهد (V_{rms}) وليس قيمة جهد الذروة (V_0)، فإذا أردنا معرفة جهد الذروة نحسبه كما يلي:

$$V_0 = \sqrt{2}\, V_{rms} = \sqrt{2} \times 220 = 311 \text{ volts}$$

التيار الناتج عن مصدر متردد للقوة الدافعة الكهربائية تيار متردد.

يُسمَّى الجذر التربيعي للقيمة المتوسطة لمربع التيار أو الجهد جذر متوسط المربعات (ج.م.م) للتيار أو الجهد.

ج.م.م للجهد و ج.م.م للتيار هما، على التوالي، القيمة الفعالّة للجهد والقيمة الفعالة للتيار.

مثال (1-12)

يعمل سخّان كهربائي قدرته 1000 W على جهد متردد قدره 220 V، احسب: (أ) مقاومة السخان. (ب) تيار الذروة المار فيه خلال عملية التسخين.

الحل:

(أ)

$$i_{rms} = \frac{\overline{P}}{V_{rms}} = \frac{1000}{220} = 4.545 \text{ A}$$

$$R = \frac{V_{rms}}{i_{rms}} = \frac{220}{4.545} = 48.4\ \Omega$$

(ب)

$$i_0 = \sqrt{2}\, i_{rms} = \sqrt{2} \times 4.545 = 6.428 \text{ A}$$

مثال (2-12)

اثبت أنَّ قيمة ج.م.م للتيار أو الجهد المتردد تُعطى بالمعادلتين (6-12) و (7-12) على الترتيب.

الحل:

لإيجاد قيمة ج.م.م لأي جهد (أو تيار متردد) فإننا نكامل مربع قيمته خلال زمن دوري واحد

على النحو التالي: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$V_{rms} = \left[\frac{\int_0^T V^2\, dt}{\int_0^T dt}\right]^{1/2} = \left[\frac{\int_0^T V_0^2 \sin^2 \omega t\, dt}{\int_0^T dt}\right]^{1/2} \tag{9-12}$$

$$= V_0 \left[\frac{\int_0^T \sin^2 \omega t\, dt}{T}\right]^{1/2}$$

وباستخدام العلاقة المثلثية $[\sin^2\omega t = \frac{1}{2}[1-\cos (2\,\omega t)]]$ نجد أن:

$$V_{rms} = V_0 \left[\frac{\frac{1}{2}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)\,dt}{T}\right]^{1/2}$$

$$= V_0\left[\frac{\frac{1}{2}(T)-\left(\frac{\sin 2\omega T}{2\omega}\right)}{T}\right]^{1/2}$$

$$= V_0\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{T(2\omega)}(\sin 2\omega T-\sin 0)\right]^{1/2}$$

وحيث أن:

$$2\omega T = 2\omega \times \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$$

فإن:

$$\sin (2\,\omega T) = \sin 4\pi = 0$$

نستنتج مما تقدم أن:

$$V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0$$

وبنفس الطريقة يُمكن البرهنة على أن:

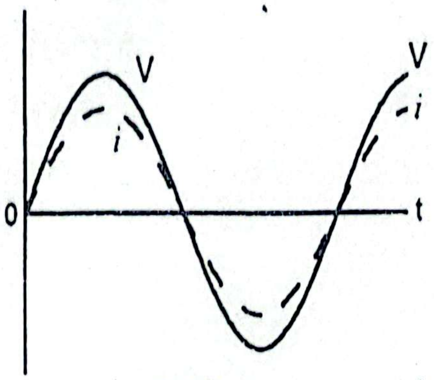
$$i_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0$$

في مناقشتنا آنفة الذكر لدارة التيار المتردد التي تحتوي على مصدر جهد متردد ومقاومة، أشرنا إلى أنّ فرق الجهد بين طرفي المقاومة والتيار المار فيها يتغيران مع الزمن كما في المعادلتين (12-1) و (12-3) التاليتين:

$$V = V_0 \sin \omega t$$

$$i = i_0 \sin \omega t$$

وهذا يعني أنّ الجهد والتيار يصلان إلى القيمة العظمى لكل منهما معا في لحظة زمنية واحدة وينخفضان إلى القيمة الصغرى لكل منهما في لحظة زمنية واحدة أخرى. فالجهد والتيار يتغيران معا في طور (phase) واحد في الدارة ونقول أنهما متحدان في الطور (in phase)، أي أنّ الاختلاف في زاوية الطور (phase angle) بينهما يساوي صفراً. ويبين الشكل (12-3) تغير الجهد والتيار مع الزمن، حيثُ يُمثّل المنحنى المتصل الجهد في حين يُمثّل المنحنى المتقطع التيار في الدارة.



الشكل (12-3)

وتختلف زاوية الطور بين الجهد والتيار إذا أدخلنا في الدارة عناصر أخرى غير المقاومة، لذلك فإننا نعيد كتابة المعادلتين السابقتين لتمثلا الحالة العامة لدارات التيار المتردد والتي قد لا يكون التيار فيها متحدا في الطور مع الجهد:

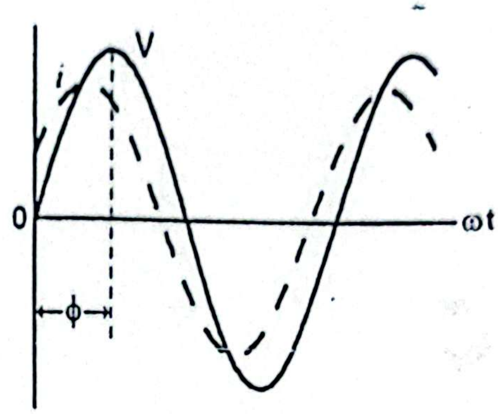
$$V = V_0 \sin \omega t$$

$$i = i_0 \sin (\omega t + \phi) \qquad (10\text{-}12)$$

حيثُ تُمثّل الزاوية ϕ الاختلاف في الطور بين الموجة الممثلة للجهد وتلك الممثلة للتيار. وتساوي قيمة ϕ في الدارات المحتوية على مقاومة فقط (بالإضافة إلى مصدر الجهد المتردد) صفرا كما تقدم، أما في الدارات الأخرى التي تحتوي على مكثف أو ملف فإنّ لزاوية الطور هذه قيمة أخرى كما سنرى في البنود اللاحقة.

ويبين الشكل (12-4) العلاقة بين التيار والجهد عند وجود اختلاف في الطور ϕ بينهما كما في المعادلة (12-10). وتلاحظ أنّ الشكل (12-4) يصبح مشابها للشكل (12-3) إذا جعلنا زاوية الطور ϕ بينهما

تساوي صفرا.



الشكل (12-4)

هناك اختلاف في الطور بين التيار والجهد في دارات التيار المتردد. وللتعبير عن ذلك فإنَّ الجهد وشدة التيار يُكتبان بشكل عام على الصيغة التالية:

$$V = V_0 \sin \omega t$$

$$i = i_0 \sin (\omega t + \phi)$$

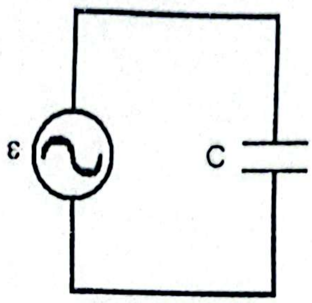
حيثُ ϕ هي زاوية الاختلاف في الطور بين V و i

□ 12-3 دارة التيار المتردد المحتوية على مكثف

عند توصيل مكثف C إلى بطارية أو إلى مصدر قوة دافعة كهربائية مباشرة (dc) فإنَّ صفيحتي المكثف تشحنان تدريجيا بشحنتين متساويتين بالمقدار ومتضادتين في النوع إلى أن يصبح فرق الجهد الناتج عن هاتين الشحنتين مساويا تماما لجهد البطارية ε أو لجهد مصدر القوة الدافعة الكهربائية حيثُ يتوقف انتقال الشحنات وينعدم بالتالي التيار الكهربائي المار في الدارة. ولذلك يمنع المكثف التيار الكهربائي من السريان بشكل مستمر وثابت خلال الدارة. أما إذا وصل نفس المكثف إلى مصدر قوة دافعة كهربائية يُعطي تيارا مترددا، (يُرمز لمصدر القوة الدافعة الكهربائية المترددة وفقا لاقتران جيبي بدائرة وبداخلها موجة جيبية) كما في الشكل (12-5)، فإنَّ تيارا مترددا يسري في الدارة بشكل متردد، وسبب ذلك أنَّ الشحنات تبدأ بالسريان إلى صفيحتي المكثف عند توصيل الدارة باتجاه معين يؤدي إلى شحن إحدى صفيحتيه بشحنة موجبة والأخرى بشحنة سالبة، وقبل أن يتم شحن المكثف تماما ينعكس اتجاه الجهد لمصدر القوة الدافعة المتردد ويؤدي إلى سريان الشحنات بالاتجاه المضاد، وهكذا دواليك. مما يؤدي إلى استمرار سريان التيار المتردد في الدارة تحت تأثير الجهد المتردد. ولمعرفة العلاقة بين التيار والجهد في الدارة المبينة في الشكل (12-5) نطبق قانون المسار المغلق لكيرشوف على النحو

التالي:

$$\varepsilon - \frac{q}{C} = 0$$



الشكل (5-12)

ونعوض عن ε من المعادلة (1-12) على النحو التالي:

$$\varepsilon_{max} \sin\omega t = \frac{q}{C} \tag{11-12}$$

ثمَّ نفاضل المعادلة (11-12) بالنسبة للزمن، فينتج أنَّ:

$$\varepsilon_{max}\, \omega \cos\omega t = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{i}{C}$$

أي أنَّ:

$$i = \varepsilon_{max}\, \omega C \cos\omega t \tag{12-12}$$

ويُمكن إعادة كتابة المعادلة (12-12) على النحو التالي:

$$i = \frac{\varepsilon_{max}}{X_c} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_{max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{13-12}$$

حيثُ استخدمنا العلاقة:

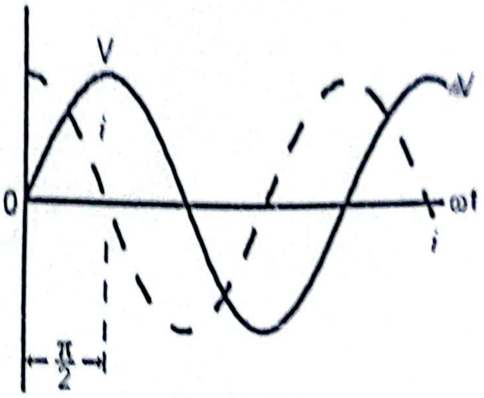
$$\cos\omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{14-12}$$

والثابت

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{15-12}$$

ويطلق على X_C اسم المفاعلة السعوية للمكثف (capacitive reactance). يبين الشكل (6-12) تغير الجهد والتيار مع الزمن للدارة المبينة في الشكل (5-12)، حيثُ يُمثّل المنحنى المتصل الجهد V في حين يُمثّل المنحى المتقطع التيار i. وتلاحظ من المعادلة (13-12) ومن الشكل (6-12) أنَّ التيار يسبق الجهد بمقدار 90° (أو $\pi/2$). أي أنَّ زاوية اختلاف الطور ϕ تساوي 90° في هذه الحالة. ويدل هذا على أنَّ القيمة المطلقة للتيار المار في المكثف تكون أكبر ما يُمكن عندما يكون فرق الجهد بين صفيحتيه صفراً، وأنَّ التيار يُصبح صفراً عندما تبلغ القيمة المطلقة لفرق الجهد بين صفيحتيه أكبر ما

يمكن، مع ملاحظة أن التيار يسبق الجهد في الطور بمقدار $\pi/2$.



الشكل (12-6)

وتلعب المفاعلة السعوية للمكثف X_C في دارة التيار المتردد المحتوية على مكثف نفس الدور الذي تلعبه المقاومة، إلا أنّ المفاعلة تربط بين التيار وفرق الجهد في زمنيين مختلفين، ووحدة المفاعلة هي الأوم.

ويتضح من المعادلة (12-15) أنّ مفاعلة المكثف تكون كبيرة للتيارات ذات الترددات المنخفضة وتكون صغيرة للتيارات ذات الترددات المرتفعة.

وعندما تؤول ω إلى الصفر، فإننا نتعامل عندئذ مع جهد مستمر غير متردد. وبالتالي ينعدم مرور التيار في الدارة، إذ أنّ مفاعلته تصبح لانهائية.

زاوية اختلاف الطور بين التيار والجهد في دارة شحن مكثف باستخدام تيار متردد تساوي 90°.

تُسمّى النسبة $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ في دارة تحوي مكثفاً المفاعلة السعوية للمكثف.

وحدة قياس مفاعلة المكثف هي الأوم (Ω)

مثال (12-3)

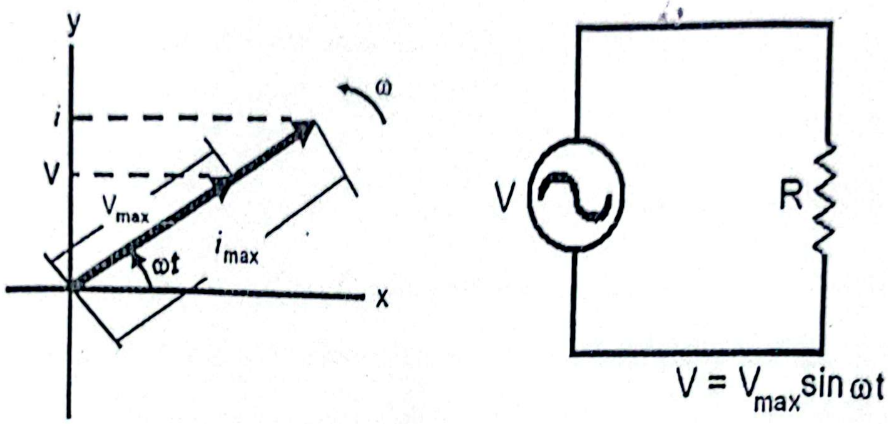
وُصل مكثف مواسعته $60\ \mu F$ إلى مصدر جهد متردد تردده $50\ Hz$ و ج.م.م له $220\ V$. احسب:
(أ) جهد الذروة للمصدر. (ب) مفاعلة المكثف السعوية. (ج) أكبر قيمة للتيار المار في الدارة. (د) التيار المار في الدارة في أية لحظة زمنية t.

الحل:

(أ) نحسب جهد الذروة V_0 للمصدر من المعادلة (12-7)، كما يلي:

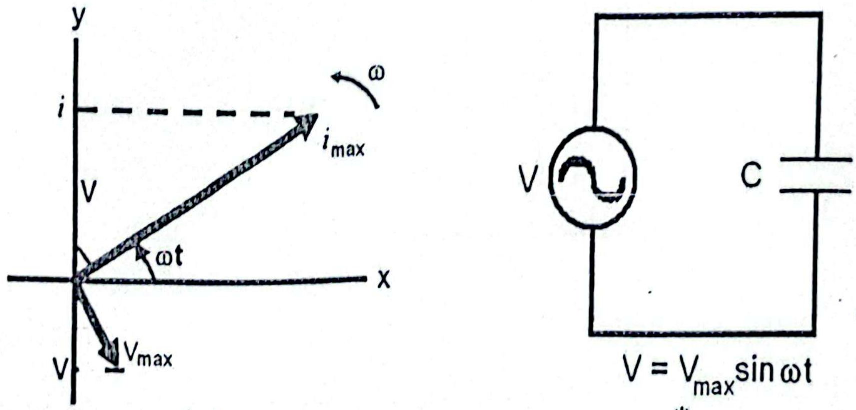
$$V_0 = \sqrt{2}\,V_{rms} = \sqrt{2}\times 220 = 311.13\ \text{Volt}$$

الطور الممثل للدارة. وتلاحظ أنّ مطوار الجهد هنا يسبق مطوار التيار بمقدار °90. وبمقارنة الشكل (12-11 ب) مع الشكل (12-12 ب) تلاحظ أنّ جهد المِحَث يختلف عن جهد المكثف في الطور بمقدار °180 (أي نصف دورة).



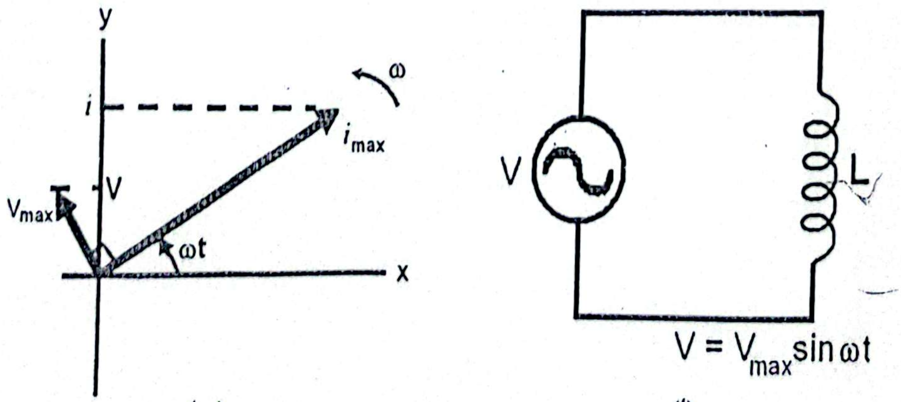
(ب) (أ)

الشكل (12-10)



(ب) (أ)

الشكل (12-11)



(ب) (أ)

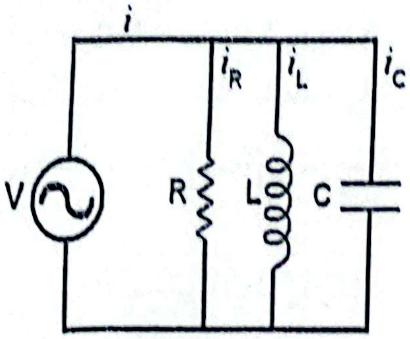
الشكل (12-12)

تستخدم المطوارات وهي متجهات من نوع خاص للتعامل مع الاقترانات الدورية التي يوجد بينها اختلافات في الطور.

ومن أشهر استخداماتها حساب شدة الضوء الناتجة عن تداخل أمواج الضوء بعد تعرضها لعائق في طريقها أبعاده قريبة من طول موجة الضوء الساقط.

6-12 دارة RLC على التوازي

يبين الشكل (13-12) دارة تحتوي على مقاومة R ومكثف C ومحث L متصلة على التوازي مع مصدر جهد متردد V. يتجزأ التيار i الخارج من المصدر في لحظة ما t إلى ثلاثة أجزاء هي i_R و i_C و i_L وتمر هذه التيارات في المقاومة R والمكثف C والمحث L على الترتيب، حيث أنّ:



الشكل (13-12)

$$i = i_R + i_C + i_L \qquad (22\text{-}12)$$

وبما أنّ العناصر الثلاثة متصلة على التوازي إلى نفس مصدر الجهد المتردد V، فإنّه يُمكن حساب التيارات i_R و i_C و i_L من المعادلات (3-12) و (13-12) و (18-12)على الترتيب، وعلى النحو التالي:

$$i_R = \frac{V_{max}}{R}\sin\omega t \qquad (23\text{-}12)$$

$$i_C = \frac{V_{max}}{(1/\omega C)}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (24\text{-}12)$$

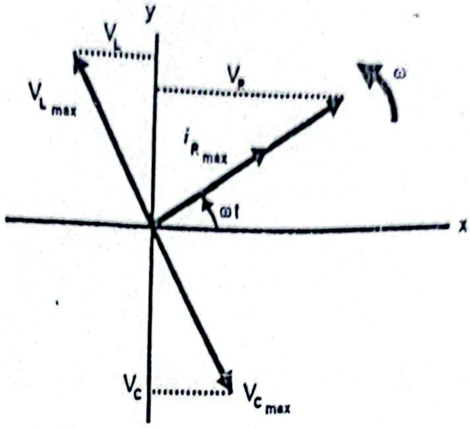
$$i_L = \frac{V_{max}}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (25\text{-}12)$$

وبالتعويض في المعادلة (22-12) فإنّ التيار الكلي في الدارة i يُعطى بالمعادلة:

$$i = V_{max}\left[\frac{1}{R}\sin\omega t+\omega C\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (26\text{-}12)$$

ويُمكن حل المعادلة (26-12) والحصول على أكبر قيمة للتيار i باستخدام مخطط المطوار للدارة.

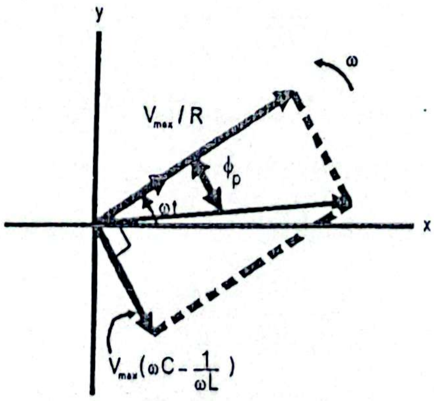
انظر الشكل (12-14).



الشكل (12-14)

وبما أنّ زاوية الطور بين i_C و i_L تساوي π من الزوايا نصف القطرية (180°)، فإنّ $V_{max}\omega C$ و $V_{max}/\omega L$ يكونان متعاكسين في مخطط المِطوار للدارة. وبالتالي يكون التيار المحصل $(V_{max}\omega C - V_{max}/\omega L)$ متعامداً مع التيار V_{max}/R المار في المقاومة ويُكوِّن معه ضلعي مثلث قائم الزاوية، كما في الشكل (12-15).

وعليه تُعطى القيمة العظمى للتيار الكلي في الدارة i_{max} بالمعادلة:



الشكل (12-15)

$$i_{max} = \sqrt{\left(V_{max}\,\omega C - \frac{V_{max}}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{V_{max}}{R}\right)^2}$$

وبعد التبسيط فإنّ:

$$i_{max} = V_{max}\sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2} \qquad (27\text{-}12)$$

أو

$$i_{max} = \frac{V_{max}}{Z_p} \qquad (28\text{-}12)$$

حيث

$$Z_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2}} \qquad (29\text{-}12)$$

وتعرف Z_p باسم الممانعة الكلية (total impedance) للدارة، ويدل الرمز الدليلي السفلي p على كونها ممانعة لدارة توازي (parallel circuit). وتتكون الممانعة من مفاعلة (reactance) ومقاومة (resistance) ووحداتها الأوم. وتكون ممانعة دارة التوازي أكبر ما يُمكن عندما تتساوى مفاعلة الملف الحثية مع مفاعلة المكثف السعوية في المقدار، وذلك عندما يحقق التردد الزاوي ω لمصدر الجهد العلاقة:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \qquad (30\text{-}12)$$

أي عند التردد ω_0 الذي تُعطى قيمته بالمعادلة التالية:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (31\text{-}12)$$

ويعرف هذا التردد ω_0 (ويُستخدم أحيانا الرمز ω_{res}) الذي تكون عنده الممانعة Z_p أكبر ما يُمكن باسم تردد الرنين (resonance frequency) للدارة. ومن المعادلتين (12-2) و (12-31) فإنّه يُمكن حساب تردد الرنين f_0 بالهيرتز، كما يلي:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (32\text{-}12)$$

وبما أنّ الممانعة تكون أكبر ما يُمكن عند تردد الرنين للدارة فإنّ التيار i_{max} يكون أصغر ما يُمكن عند هذا التردد. وعند هذا التردد لا يكون التياران في L و C مختلفين في الطور بمقدار نصف دورة فحسب، ولكن يكون لهما نفس المقدار تماما. لذلك يلغي هذان التياران بعضهما بعضا، ويصبح التيار الكلي في الدارة مساويا للتيار المار في المقاومة R فقط. أما إذا كانت الدارة لا تحتوي على مقاومة (أي إذا كانت $R = \infty$) وكانت $X_L = X_C$ فإنّ ممانعة الدارة تصبح لانهائية ($Z_p \rightarrow \infty$)، مما يجعل التيار المسحوب من مصدر الجهد المتردد عند الرنين يساوي صفرا.

ويُعطى الحل الكامل للتيار في أية لحظة زمنية t بالمعادلة:

$$i = \frac{V_{max}}{Z_p}\sin(\omega t - \phi_p) \qquad (33\text{-}12)$$

$i = 0$

$Z_p \rightarrow \infty$

دارة RLC على التوازي دارة رنين.

تُعرَّف ممانعة دارة RLC على التوازي بالعلاقة: $$Z_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2}}$$

تكون الممانعة Z_p أكبر ما يُمكن، وبالتالي يكون التيار المار في الدارة أصغر ما يُمكن عندما

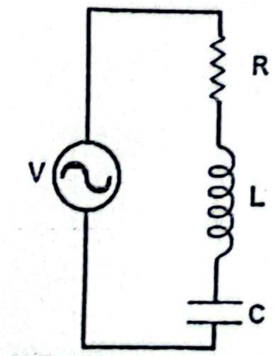
يتحقق الشرط: $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$

ويُسمَّى التردد الزاوي الذي يتحقق عنده الشرط السابق تردد الرنين للدارة ويُرمز له بالرمز

ω_0 (أو ω_{res}) ويُعطى بالعلاقة: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

□ 7-12 دارة RLC على التوالي

يبين الشكل (12-16) دارة تحتوي على مقاومة R ومِحَث L ومكثف C متصلة على التوالي مع مصدر جهد متردد V. يتجزأ الجهد الكلي V في الدارة على عناصرها الثلاثة أي أنَّ:



الشكل (12-16)

$$V = V_R + V_L + V_C \qquad (35\text{-}12)$$

حيثُ تُمثِّل V_R و V_L و V_C القيم اللحظية للجهد عبر المقاومة والمِحَث والمكثف على الترتيب، في اللحظة الزمنية t. ويجب أن لا ننسى أنَّ التيار والجهد في الدارة غير متحدين في الطور في العناصر الثلاثة، فالتيار يسبق الجهد في المكثف ويتخلف عنه في المِحَث، لذلك فإنَّ فروق الجهد في المعادلة (12-35) لا تجمع جمعاً جبرياً بسيطاً. وكذلك فإنَّ مجموع القيم العظمى لفروق الجهد بين طرفي كل من العناصر الثلاثة $V_{R_{max}}$ و $V_{L_{max}}$ و $V_{C_{max}}$، على الترتيب، لا يساوي القيمة العظمى لجهد المصدر. ولإيجاد التيار i المار في الدارة في أية لحظة زمنية t نستخدم مخطط المطوار للدارة، كما في الشكل (12-17).

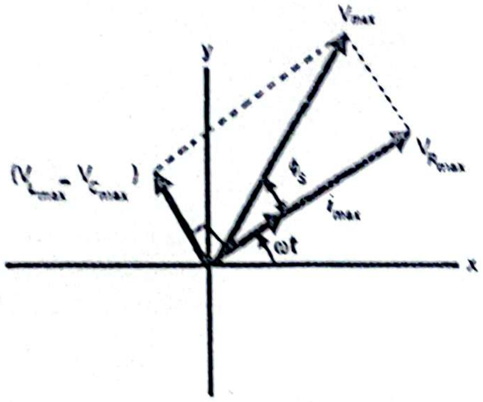
وكما هي الحال في دارة RLC على التوازي، نلاحظ أنَّ تيار المكثف يسبق تيار المِحَث بمقدار نصف

دورة (180°). لذلك تبسّط مخطط الطوار ليصبح على النحو المبين في الشكل (12-18). ويتضح من الشكل (12-18) أنّ القيمة العظمى لجهد المصدر V_{max} ترتبط مع محصلة جهدي المحث والمكثف ومع جهد المقاومة بالعلاقة التالية:

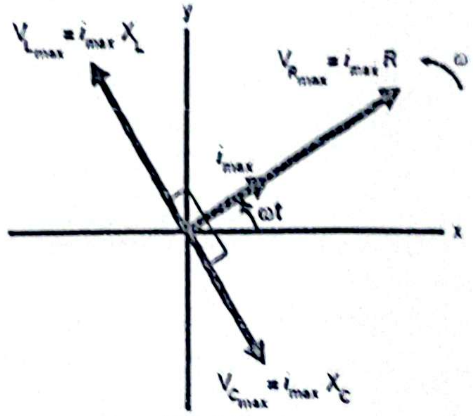
$$V_{max} = \sqrt{V_{R_{max}}^2 + \left(V_{L_{max}} - V_{C_{max}}\right)^2} \tag{36-12}$$

$$= \sqrt{i_{max}^2 R^2 + (i_{max} X_L - i_{max} X_C)^2}$$

$$= i_{max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$



الشكل (12-18)



الشكل (12-17)

أو

$$V_{max} = i_{max} Z_s \tag{37-12}$$

حيث تُعطى الممانعة Z_s لدارة RLC على التوالي بالمعادلة:

$$Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{38-12}$$

ويدل الرمز الدليلي السفلي s في المعادلة السابقة على أنّ الممانعة هي لدارة توالي (series circuit). وأما زاوية الطور ϕ_s بين تيار الدارة وجهد المصدر فتُعطى بالمعادلة:

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{V_{L_{max}} - V_{C_{max}}}{V_{R_{max}}}\right)$$

وبالتبسيط نجد أنّ:

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \tag{39-12}$$

كما يُمكن حساب زاوية الطور ϕ_s وفقا للشكل (12-18) على النحو التالي:

$$\phi_s = \cos^{-1}\left(\frac{R}{Z_s}\right) \tag{40-12}$$

مما تقدم فإنّ التيار الكلي المار في الدارة يُعطى بالمعادلة:

$$i = i_{max} \sin(\omega t - \phi_s) \quad (41\text{-}12)$$

حيثُ تُعطى i_{max} و ϕ_s بالمعادلتين (12-37) و (12-39) على الترتيب.

ويكون التيار والجهد مختلفين في الطور، إلا إذا كانت:

$$X_L - X_C = 0 \quad (42\text{-}12)$$

حيثُ تدل المعادلة (12-39) على أنَّ $\phi_s = 0$ في هذه الحالة. ويُطلق على التردد $\omega 0$ الذي يحقق المعادلة (12-42) اسم تردد الرنين للدارة (resonance frequency). ويُمكن حساب تردد الرنين هذا من المعادلة (12-42) على النحو الآتي:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

أي أنَّ:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (43\text{-}12)$$

وتلاحظ من المعادلتين (12-31) و (12-43) أنَّ زاوية الطور بين التيار والجهد تصبح صفراً في دارتي RLC على التوالي وعلى التوازي فقط عند تردد الرنين ω_0، كما تلاحظ أنَّ تردد الرنين يُعطى بنفس العلاقة في الدارتين.

ويتضح من المعادلة (12-38) أنَّ ممانعة دارة RLC على التوالي تصبح مساوية للمقاومة R عند تردد الرنين، أي أنَّ:

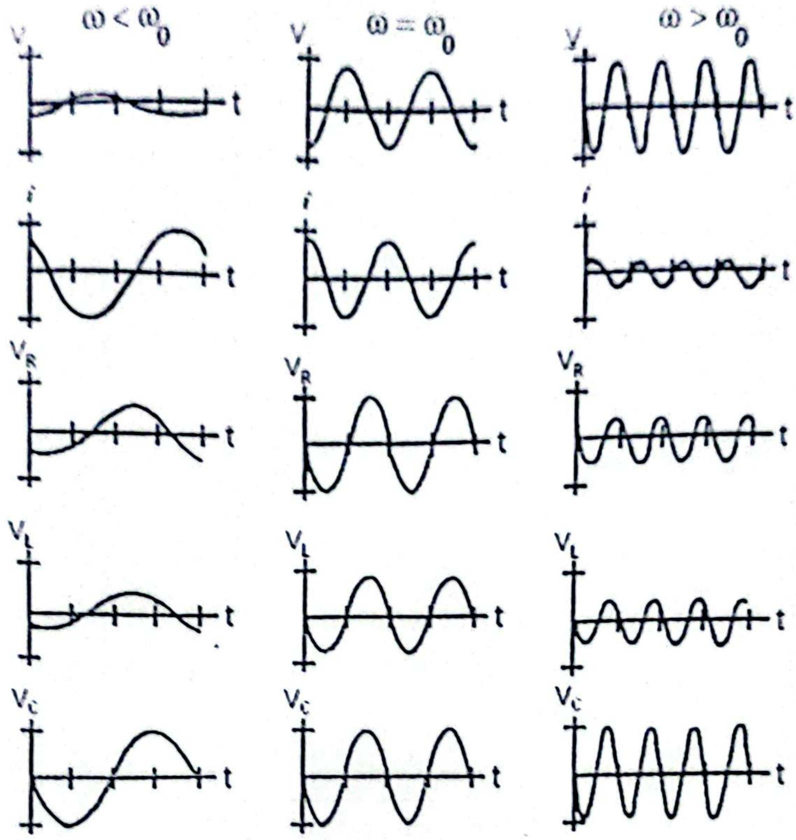
$$Z_s = R \; ; \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \quad (44\text{-}12)$$

وإذا كانت الدارة خالية من المقاومة R، أي تحتوي على L و C فقط (أي أنَّ $R = 0$)، فإنَّ الممانعة تنعدم كلياً ويصبح التيار المار في الدارة لانهائياً. وبالطبع لا يتحقق هذا الوضع عملياً حتى لو انعدمت المقاومة R أو أزيلت من الدارة ولم يبق سوى L و C فقط لأنَّ للملف مقاومته الخاصة والثابتة والناتجة عن مادة السلك المصنوع منه. لذلك من الأصح أن نقول بأنَّ التيار يصبح أكبر ما يُمكن إذا حقق تردده المعادلة (12-43). وهذا عكس الوضع في دارة RLC على التوازي حيثُ كان التيار هناك أصغر ما يُمكن عندما حقق تردده المعادلة (12-31). ونلخص ما تقدم بالقول أنه عندما يكون تردد دارة RLC مساوياً لتردد الرنين لها، أي إذا كان $\omega = \omega_0$، فإنَّ:

$$Z_p \to \infty \;\; ; \; i \to 0 \quad \text{(في حالة التوازي)}$$

$$Z_s \to 0 \;\; ; \; i \to \infty \quad \text{(في حالة التوالي)}$$

ويُمكن تمثيل تغير التيار وفرق الجهد بين طرفي كل من عناصر دارة RLC الثلاثة بيانياً كما في الشكل (12-19) وفقاً للمعادلات التالية:



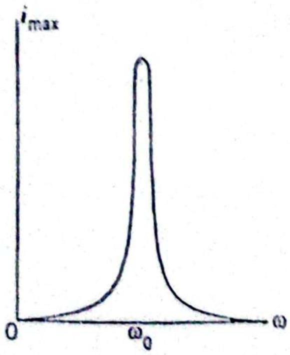
الشكل (19-12)

$$V_R = iR = \left(\frac{V_{max}R}{Z_s}\right)\sin(\omega t - \phi_s) \qquad (45\text{-}12)$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \left(\frac{V_{max}\,\omega L}{Z_s}\right)\sin\left(\omega t - \phi_s + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (46\text{-}12)$$

$$V_L = \frac{q}{C} = \left(\frac{V_{max}}{\omega C Z_s}\right)\sin\left(\omega t - \phi_s - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (47\text{-}12)$$

ويبين الشكل (20-12) اعتماد القيمة العظمى للتيار على التردد الزاوي ω لدارة RLC على التوالي المبينة في الشكل (16-12)، حيث نلاحظ أنّ التيارَ المار في الدارة يكون أكبر ما يُمكن عندما يكون تردده مساويا لتردد الرنين للدارة.



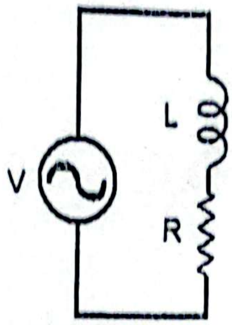
الشكل (20-12)

مثال (12-6)

وُصل ملف محاثته 20 mH ومقاومته 0.1 Ω إلى مصدر جهد متردد القيمة العظمى لجهده 16 V وتردده 50 Hz . احسب: (أ) القيمة العظمى للتيار المار في الملف، (ب) زاوية الطور بين التيار والجهد في الدارة.

الحل:

لحل المسألة يُمكن تمثيل الملف كما لو كان مِحثًا محاثته 20 mH متصلاً على التوالي مع مقاومة قدرها 0.1 Ω إلى مصدر الجهد المتردد، كما في الشكل (12-21).



الشكل (12-21)

(أ)

$$Z_s = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \sqrt{(0.1)^2 + \left(2\pi\times50\times20\times10^{-3}\right)^2}$$

$$= 6.28\ \Omega$$

وبتطبيق المعادلة (12-37) يُمكن حساب القيمة العظمى للتيار على النحو التالي:

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{Z_s} = \frac{16}{6.28} = 2.55\ A$$

(ب) يُمكن حساب زاوية الطور ϕ_s من المعادلة (12-40)، على النحو التالي:

$$\phi_s = \cos^{-1}\left[\frac{R}{Z_s}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{0.1}{6.28}\right] \cong 89^\circ$$

مثال (12-7)

كم يجب أن نغير تردد التيار في دارة (رنين) RLC على التوالي لكي تصبح قيمة التيار العظمى مساوية لنصف قيمتها عند تردد الرنين؟

الحل:

كما يتضح من الشكل (12-20)، فإنّ للمسألة حلين عند تردد ω_- أقل من ω_0 وعند تردد ω_+ أكبر من

ω_0 حيث يكون:

$$i_{max}(\omega_-) = i_{max}(\omega_+) = \frac{i_{max}(\omega_0)}{2}$$

وباستخدام المعادلتين (12-37) و (12-38) فإنّ:

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+[(1/\omega_\pm C)-\omega_\pm L]^2}} = \frac{1}{2}\frac{V_{max}}{R}$$

حيثُ يُمثّل الطرف الأيمن للمعادلة السابقة التيار في حالة الرنين. أي عند تردد ω_0 $(Z_s = R)$.

وللحصول على قيمة $\omega_\pm$ نربع طرفي المعادلة ونعيد ترتيب الحدود، فنجد أن:

$$[(1/\omega_\pm C)-\omega_\pm L]^2 = 3R^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للمعادلة السابقة وإعادة ترتيب الحدود، نستنتج أنّ:

$$\omega_\pm^2-\omega_0^2 = \pm\sqrt{3}\frac{R}{L}\omega_\pm$$

حيثُ عوضنا عن ω_0 في المعادلة السابقة بما يساويها $\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$. وبما أنّ الرنين يكون حاد

القيمة حول ω_0 كما في الشكل (12-20)، فإننا نستطيع تقريب $\omega_\pm$ ووضعها مساوية للتردد ω_0 في الطرف الأيمن من المعادلة السابقة، وإعادة كتابتها لتصبح على النحو التالي:

$$\omega_\pm^2-\omega_0^2 = (\omega_\pm-\omega_0)(\omega_\pm+\omega_0) \approx (\omega_\pm-\omega_0)(2\omega_0)$$

اي أنّ:

$$\omega_\pm-\omega_0 \approx \pm\frac{\sqrt{3}\frac{R}{L}\omega_0}{2\omega_0} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R}{L}$$

نستنتج مما تقدم بأنه يلزم زيادة أو نقصان تردد التيار بمقدار $\left(\sqrt{3}R/2L\right)$ حول تردد الرنين ω_0 للحصول على قيمة التيار المطلوب.

مثال (12-8)

افترض أنّ $R = 10\ \Omega$ و $L = 30\ mH$ و $C = 15\ \mu F$ في دارة RLC على التوالي وأنّ قيمة ج.م.م للمصدر تساوي $60\ V$ وتردده $900\ Hz$، ثمّ احسب: (أ) المفاعلة الحثية والمفاعلة السعوية في الدارة. (ب) قيمة تيار الذروة في الدارة. (ج) القيمة العظمى للجهد بين طرفي كل عنصر من عناصر الدارة. (د) زاوية الطور ϕ_s.

الحل:

(أ) حساب X_L:

$$X_L = 2\pi f L = 2 \times 3.14 \times 900 \times 30 \times 10^{-3}$$
$$= 169.56\ \Omega$$

حساب X_C:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\times3.14\times900\times15\times10^{-6}}$$
$$= 11.8\ \Omega$$

(ب) حساب Z_s:

$$Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{(10)^2 + (169.56 - 11.8)^2} = 158.1\Omega$$
$$\therefore\ i_{max} = \frac{V_{max}}{Z_S} = \frac{\sqrt{2}\,V_{rms}}{Z_S} = \frac{\sqrt{2}\times60}{158.1} = 0.54\ \text{A}$$

(جـ)

$$V_{R_{max}} = i_{max} R = 0.54 \times 10 = 5.40\ \text{V}$$
$$V_{L_{max}} = i_{max} X_L = 0.54\times169.56 = 91.56\ \text{V}$$
$$V_{C_{max}} = i_{max} X_C = 0.54\times11.80 = 6.37\ \text{V}$$

(د) بتطبيق المعادلة (12-39) نجد أنّ:

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{169.65 - 11.80}{10}\right)$$
$$= \tan^{-1}(15.79) = 86.4°$$

□ 12-8 القدرة في دارات التيَّار المتردد

ناقشنا في البند (12-2) اعتماد القدرة الكهربائية على التيار والجهد في دارة التيار المتردد المحتوية على مصدر جهد ومقاومة وبينا طريقة حسابها باستخدام قيمتي ج.م.م للتيار والجهد أو القيمة الفعالة لهما. وننتقل في هذا الجزء الأخير من الفصل لحساب القدرة الكهربائية بشكل عام، ولإيجاد العلاقة بينها وبين زاوية اختلاف الطور بين التيار والجهد المترددين.

يُمكن حساب القدرة لدارة التيار المتردد بشكل عام باستخدام المعادلتين (12-1) و (12-10) للجهد والتيار في الدارة، على الترتيب، وذلك على النحو التالي:

$$P = \varepsilon\, i = \varepsilon_{max}\, i_{max} \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) \qquad (48\text{-}12)$$

وباستخدام العلاقة المثلثية:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad (49\text{-}12)$$

فإننا نستطيع إعادة كتابة المعادلة (12-48) كما يلي:

$$P = P_{max} \sin\omega t\, [\sin\omega t \cos\phi + \cos\omega t \sin\phi] \qquad (50\text{-}12)$$

حيث:

$$P_{max} = \varepsilon_{max}\, i_{max} \qquad (51\text{-}12)$$

وباستخدام العلاقة المثلثية

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \qquad (52\text{-}12)$$

لتبسيط المعادلة (50-12) نستنتج أنّ:

$$P = P_{max}\left[\sin^2 \omega t \cos\phi + \frac{1}{2}\sin 2\omega t \sin\phi\right]$$

وباستخدام العلاقة المثلثية:

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \qquad (53\text{-}12)$$

نجد أنّ:

$$P = P_{max}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\cos\phi + \frac{1}{2}(\sin 2\omega t \sin\phi)\right]$$

وبإعادة ترتيب الحدود فإنّ القدرة في أي لحظة تُعطى بالمعادلة:

$$P = \frac{1}{2}P_{max}\,[\cos\phi - (\cos 2\omega t \cos\phi - \sin 2\omega t \sin\phi)] \qquad (54\text{-}12)$$

وعند حساب القيمة الفعالة أو المتوسطة للقدرة من المعادلة (54-12) فإنّ الحدين الثاني والثالث في الطرف الأيمن يساويان صفراً لاحتوائهما على $\cos 2\omega t$ و $\sin 2\omega t$، إذ أنّ القيمة المتوسطة لكل من هذين الحدين تساوي صفراً. لذلك فإنّ القيمة المتوسطة للقدرة تُعطى بالمعادلة التالية:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}P_{max}\cos\phi \qquad (55\text{-}12)$$

ويُمكن إيجاد العلاقة بين القيمة الفعالة للقدرة والقيمة الفعالة (قيمة ج.م.م) لكل من التيار والجهد المترددين كما يلي:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}P_{max}\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}i_{max}\cos\phi$$

أي أنّ:

$$P_{rms} = \overline{P} = \varepsilon_{rms}\, i_{rms} \cos\phi \qquad (56\text{-}12)$$

ويتضح من المعادلة (56-12) أنّ القدرة في دارات التيار المتردد تعتمد على جيب تمام زاوية الطور ϕ بجانب اعتمادها على التيار والجهد. كما يتضح من نفس المعادلة (56-12) أنّ القدرة المتوسطة والفعالة تكون اكبر ما يُمكن إذا كانت $\phi = 0$، وأنّها تصبح صفراً عندما يكون الاختلاف في الطور بين التيار والجهد 90° (لأنّ $\cos\phi = \cos 90^\circ = 0$). ويطلق على $\cos\phi$ اسم عامل القدرة

(power factor). ومن الجدير بالملاحظة أنّ مقدار عامل القدرة عمليا يكون موجبا دائما، إذ أنّ زاوية اختلاف الطور بين التيار والجهد تتراوح بين 0° أو 90°، ولا يُمكن أن تزيد على 90°، ولذلك يكون مقدار $\cos\phi$ موجبا دائما. ولا يهم أي المقدارين يسبق الآخر، فسواء سبق التيار الجهد أم تأخر عنه يظل مقدار الاختلاف في الطور هو المهم $|\phi|$.

مما تقدم نستنتج أنّ القدرة الكهربائية تُبدّد في دارات التيار المتردد بواسطة المقاومة فقط، ولا تُبدّد بواسطة المفاعلة الحثية أو السعوية. وكما رأينا في الفصل الحادي عشر فإنّ الطاقة الكهربائية تختزن في المحث أو المكثف ولا تتبدد أو تُستهلك في أيٍّ منهما.

مثال (12-9)

وُصل مكثف مواسعته 8 µF وملف محاثته 30 mH ومقاومة 4 Ω مع مصدر جهد متردد قيمة ج.م.م له 12 V وتردده 1000 Hz على التوالي. احسب: (أ) ممانعة الدارة. (ب) زاوية الطور. (ج) عامل القدرة. (د) متوسط القدرة.

الحل:

(أ) نحسب المفاعلة السعوية والمفاعلة الحثية أولا، ثم نعوض قيمتيهما في المعادلة (12-38) لإيجاد ممانعة الدارة.

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\times3.14\times1000\times8\times10^{-6}} = 19.89\ \Omega$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\times3.14\times1000\times30\times10^{-3} = 188.4\ \Omega$$

$$\therefore\ Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (188.40 - 19.89)^2} = 168.56\Omega$$

(ب) يُمكن حساب زاوية الطور ϕ باستخدام المعادلة (12-40)، على النحو التالي:

$$\phi = \cos^{-1}\frac{R}{Z_S} = \cos^{-1}\frac{4}{168.56} \approx 88.64^\circ$$

(ج) لحساب عامل القدرة نجد جيب تمام زاوية الطور:

$$\cos\phi = \cos 88.64^\circ = 0.024$$

(د) لإيجاد متوسط القدرة نحسب قيمة ج.م.م للتيار المار في الدارة ثم نعوضها في المعادلة (12-56) وذلك على النحو التالي:

$$i_{max} = \frac{V_{max}}{Z_S} = \frac{12}{168.56} = 0.071\ A$$

$$P_{rms} = V_{rms}\, i_{rms} \cos\phi = 12\times0.071\times0.024 = 0.02\ W$$

ملخص الفصل الثاني عشر

1. في حين تُستخدم مصادر القوة الدافعة التأثيريّة لتوليد تيار مستمر (direct current) فإنّ المُولّدات الكهربائية تُولّد تيارات مترددة.

2. يتذبذب التيار المتردد i بين قيمتين هما $-i_{max}$ و $+i_{max}$ حيثُ i_{max} تيار الذروة ورمزه i_0 أو i_p.

3. يُسمّى عدد الذبذبات، أي عدد الدورات الكاملة التي يتمها الجهد أو التيار في الثانية الواحدة، التردد (f). قيمة f في الأردن والعديد من دول العالم تساوي 50 Hz.

4. تتغير القوة الدافعة الكهربائية ε الناتجة عن مُولّد كهربائي مع الزمن بشكل جيبي، أي أنّ:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

ويتغير التيار الناتج مع الزمن بشكل جيبي أيضا، أي أنّ:

$$i = i_0 \sin \omega t$$

حيثُ ω هي التردد الزاوي والذي يُعطى بالعلاقة $\omega = 2\pi f$

5. القيمة المتوسطة لمربع التيار أو الجهد هي القيمة المهمة في حساب القدرة الكهربائية في حالة التيار المتردد. ويُسمّى الجذر التربيعي لهذه القيمة المتوسطة جذر متوسط المربعات ويُختصر بالأحرف ج.م.م للجهد (V_{rms}) و ج.م.م للتيار (i_{rms}) على الترتيب.

تُمثّل ج.م.م للجهد و ج.م.م للتيار على الترتيب القيمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة للتيار وتُعطيان بالعلاقتين التاليتين:

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{V^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0$$

$$i_{rms} = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i_0$$

6. لشحن مكثف فإنّه يلزم مصدر جهد. إذا كان التردد هو ω ومواسعة المكثف هي C فإننا نعرف المفاعلة السعوية (capacitive reactance) للمكثف، ووحدتها الأوم، والتي تلعب دور المقاومة، بالعلاقة:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

7. في حالة وصل ملف (L) مع مصدر جهد متردد تردده ω فإننا نعرف المفاعلة الحثية (inductive reactance) للملف، ووحدتها الأوم، بالعلاقة:

$$X_L = \omega L$$

8. يكون التيار المار في مقاومة موصولة بمصدر جهد متردد في نفس الطور مع جهد المصدر.

9. يسبق التيار المار في مكثف الجهد بين طرفيه بمقدار $90°$ عند وصله بمصدر جهد متردد.

10. يتخلف التيار المار في ملف عن الجهد بين طرفيه بمقدار $90°$ عند وصله بمصدر جهد متردد.

11. تستخدم المطوارات لدراسة تغيرات التيار والجهد (الجيبية) في دارة تحوي مصدر جهد متردد (أي يمر بها تيار متردد). المطوار هو متجه (من نوع خاص فهو دوّار) يُمثل التيارات والجهد في دارة ما. وتُمثل قيمة المطوار قيمة المتغير قيد الدراسة ويُمثل اتجاهه طور هذا المتغير.

12. تُعرّف الممانعة الكليّة لدارة RLC على التوازي بالعلاقة:

$$Z_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2}}$$

وتكون أكبر ما يُمكن عندما يكون التردد ω مساويا للقيمة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

والتي تُسمّى تردد الرنين (resonance frequency)، أي أنّ التيار في هذه الدارة يكون أكبر ما يُمكن عند هذا التردد.

13. تُعرّف الممانعة الكليّة لدارة RLC على التوالي بالعلاقة:

$$Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

وتكون أقل ما يُمكن عندما يكون التردد ω مساويا للقيمة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

والتي تُسمّى تردد الرنين أيضا، أي أنّ التيار في هذه الدارة يكون أصغر ما يُمكن عند هذا التردد.

تمارين

1: الجهد المستخدم في الأردن هو $220\ V$ بتردد $50\ Hz$. إن القدرة المستخدمة في تشغيل مكواة تحتاج إلى $2.27\ A$ لكي تعمل تساوي تقريباً:

أ) $100\ W$ ب) $500\ W$ ج) $1000\ W$ د) $7.7\ W$

2: إذا كان تردد التيار المستخدم في دارة شحن مكثف مواسعته $5\ \mu F$ يُساوي $50\ Hz$، فإنّ مفاعلة الدارة السعوية تُساوي تقريباً:

أ) $637\ \Omega$ ب) $400\ \Omega$ ج) $250\ k\Omega$ د) $20\ \mu\Omega$

3: في دارة تحوي مصدر جهد متردد ومكثف تكون زاوية الاختلاف في الطور بين التيار والجهد تساوي:

أ) 0 ب) ∞ ج) π د) $\pi/2$

4: وُصِل ملف مقاومته $5\ \Omega$ ومحاثته $200\ mH$ في دارة مغلقة مع مصدر جهد متردد وتردده $50\ Hz$. إذا كانت أكبر قيمة للتيار في الدارة هي $0.5\ A$ فإنّ قيمة V_{max} تساوي:

أ) $31.4\ V$ ب) $62.8\ V$ ج) $94.2\ V$ د) $314.0\ V$

5: تردد الرنين لدارة LC، حيثُ $L = 100\ mH$ و $C = 10\ \mu F$ يساوي تقريباً:

أ) $159\ Hz$ ب) $1\ Hz$ ج) $1\ kHz$ د) $159\ kHz$

6: تردد الرنين الزاوي (ω_0) لدارة RLC، حيثُ $R = 10\ \Omega$ و $L = 50\ mH$ و $C = 20\ \mu F$، بوحدة $rad\ s^{-1}$ يساوي:

أ) 10^{-6} ب) 10^{-3} ج) 10^{2} د) 10^{3}

7: تكون ممانعة الدارة في السؤال (6) إذا كانت المقاومة والمكثف والملف موصولة على التوالي تُساوي تقريباً:

أ) $1.0\ k\Omega$ ب) $10.0\ \Omega$ ج) $24.1\ k\Omega$ د) $34.1\ k\Omega$

8: تكون ممانعة الدارة في السؤال (6) إذا كانت المقاومة والمكثف والملف موصولة على التوازي تُساوي تقريباً:

أ) $25.2\ \Omega$ ب) $252.0\ \Omega$ ج) $10.0\ \Omega$ د) $100.0\ \Omega$

9: عندما يتحقق شرط الرنين في دارة RLC موصولة على التوازي مع مصدر جهد متردد ε فإنّ شدة التيار المار في المقاومة تُساوي:

أ) ε/R ب) ε/LC ج) 0 د) ∞

10: عندما يتحقق شرط الرنين في دارة RLC فإنّ ممانعة الدارة تُساوي:

أ) 0 ب) R ج) $L\times C$ د) ∞

مسائل

ملاحظة: إنّ القيم المعطاة للتيار وكذلك الجهد في هذه المجموعة من المسائل هي القيم الفعالة (ج.م.م) ما لم يذكر خلاف ذلك.

1-12 احسب التردد والزمن الدوري والتردد الزاوي لموجة تكمل 300 دورة في 6 ثوان.

2-12 تعطى الموجة التي تمثل فرق الجهد بين طرفي مقاومة مقدارها $320\ \Omega$ بالمعادلة:

$$V = 160 \sin\left(628\,t + \frac{\pi}{12}\right)$$

حيثُ t: بالثانية وV: بالفولت. جد:

(أ) تردد الموجة. (ب) الزمن الدوري للموجة. (جـ) جهد الذروة للموجة. (د) زاوية الطور. (هـ) تردد الموجة الزاوي. (و) تيار الذروة والقيمة الفعالة له. (ز) فرق الجهد اللحظي بين طرفي المقاومة عندما تكون $t = 1\ \text{ms}$.

3-12 مكثف مواسعته $1\ \mu F$. عند أي تردد تصبح مفاعلته $159\ \Omega$؟

4-12 ملف محاثته $1\ mH$. عند أي تردد تصبح مفاعلته $628\ \Omega$؟

5-12 ارسم رسما بيانيا يوضح تغير المفاعلة مع التردد لمكثف مواسعته $1\mu F$ عندما يزداد التردد من صفر إلى $100\ kHz$.

6-12 ارسم رسما بيانيا يوضح تغير المفاعلة مع التردد لملف محاثته $1mH$ عندما يزداد التردد من صفر إلى $100\ kHz$.

7-12 جد مقاومة التسخين والقيمة العظمى للتيار المار في مدفأة كهربائية قدرتها $2000\ W$ عند توصيلها في الأردن مع مصدر جهد متردد مقداره $220\ V$. ماذا يحصل للمدفأة لو أنها وُصلت في بلد آخر مثل أمريكا حيثُ يبلغ جهد المصدر المتردد هناك $110\ V$؟

8-12 مصباح كهربائي قدرته $100\ W$ ويعمل على مصدر جهد متردد مقداره $220\ V$. ما مقاومة سلك المصباح ؟

9-12 عند أي تردد تتساوى مفاعلة مكثف مواسعته $4\ \mu F$ مع مفاعلة ملف محاثته $10\ mH$؟

10-12 ملف محاثته $5\ mH$ متصل مع مصدر جهد متردد قوته الدافعة الكهربائية ε تُعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon = 20 \cos 2\pi f t$$

حيثُ t: بالثانية و ε: بالفولت

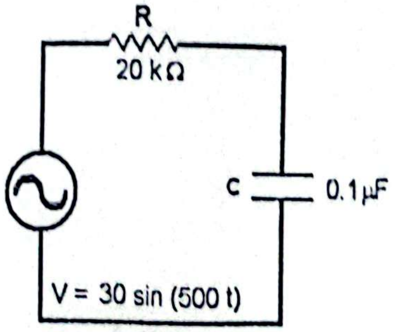
ما قيمة التيار العظمى المار في الدارة عندما يكون التردد f للمصدر يساوي:

(أ) $100\ Hz$. (ب) $1\ kHz$.

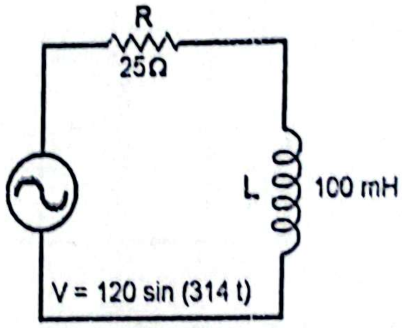
11-12 كم يستغرق الجهد V= 12 sin 2000t حتى يصل لقيمة لحظية 6V بعد أن يمر بالصفر وتزيد قيمته بالموجب؟

12-12 في الشكل (12-22) أوجد: (أ) تردد المصدر. (ب) مفاعلة الملف. (جـ) ممانعة الدارة. (د) زاوية الطور بين التيار والجهد.

13-12 في الشكل (12-23) أوجد: (أ) تردد المصدر. (ب) مفاعلة المكثف. (جـ) ممانعة الدارة. (د) زاوية الطور بين التيار والجهد.

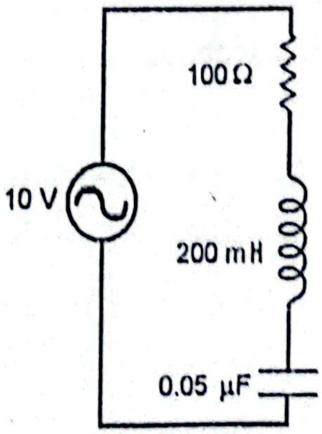


الشكل (12-23)



الشكل (12-22)

14-12 وُصِل مكثف مواسعته 0.05 μF وملف محاثته 200 mH ومقاومة 100 Ω مع مصدر جهد متردد قيمة ج.م.م لجهده 10 V على التوالي كما هو مبين في الشكل (12-24). إذا ضُبط تردد مصدر الجهد حتى حصل الرنين في الدارة فاحسب: (أ) تردد الرنين. (ب) التيار المار في الدارة. (جـ) فرق الجهد بين طرفي كل من المقاومة والمكثف والملف. (د) زاوية الطور. (هـ) القدرة المبددة في الدارة.

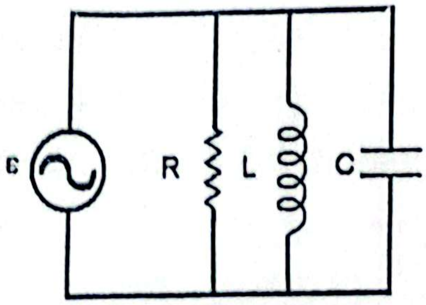


الشكل (12-24)

15-12 أعد حل الفروع (ب) و (جـ) و (د) و (هـ) في السؤال السابق عندما يكون تردد المصدر 2 kHz .

16-12 ما مقدار مقاومة الملف الذي ممانعته 225 Ω ومفاعلته 20 Ω؟

17-12 وُصل مكثف مواسعته $10\ \mu F$ وملف محاثته $100\ mH$ ومقاومة $100\ \Omega$ مع مصدر جهد متردد قيمة جهده العظمى $14.14\ V$ على التوازي كما هو مبين في الشكل (25-12) إذا ضُبط تردد المصدر حتى حصل الرنين في الدارة فاحسب: (أ) تردد الرنين، (ب) التيار المار في كل من R و L و C. (ج) تيار المصدر. (د) فرق الجهد بين طرفي كل من R و L و C. (هـ) زاوية الطور.



الشكل (25-12)

18-12 أعد حل الفروع (ب) و (ج) و(د) و(هـ) من السؤال السابق عندما يكون تردد المصدر $500\ Hz$.

19-12 إنّ مرور تيار كهربائي متردد مقداره $35\ mA$ في جسم إنسان لمدة ثانية واحدة قد يسبب وفاته إذا كان تردد المصدر $50Hz$، وجهده الفعال $220V$. احسب ممانعة الأشخاص الذين قد يتعرضون للوفاة عند صدمهم كهربائيا بذلك التيار.

20-12 وُصل ملف ومقاومة $100\ \Omega$ ومصدر جهد متردد جهده $220\ V$ وتردده $50\ Hz$ على التوالي في دارة مغلقة. إذا علمت أنّ الجهد في الدارة يتقدم على التيار بزاوية طور قدرها $45°$ وإن فرق الجهد بين طرفي المقاومة $50\ V$، فاحسب: (أ) مقاومة الملف. (ب) محاثة الملف.

21-12 تنقل الطاقة الكهربائية من محطات التوليد للمستهلكين عبر سلكين موصلين متوازيين مساحة مقطع كل منهما A وطولهما الكلي $2\ l$، حيثُ يخدم أحد السلكين كخط عودة. (أ) اثبت أنّ القدرة الكهربائية الضائعة على شكل حرارة في الأسلاك الموصلة للحمل (load) تُعطى بالعلاقة:

$$P = \frac{2\rho\, l\, P_L^2}{A\, V^2 \cos\phi}$$

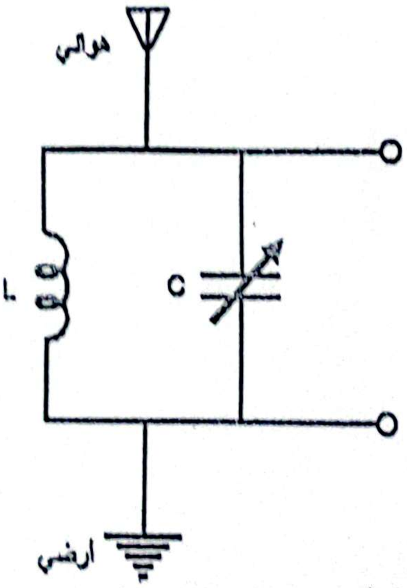
حيثُ تمثل $\cos\phi$: عامل القدرة و P_L: القدرة المزودة للحمل وρ: المقاومية لأسلاك التوصيل.

(ب) بيّن كيف يُمكن تقليل القدرة الضائعة في أسلاك التوصيل كحرارة مستعيناً بالمعادلة السابقة.

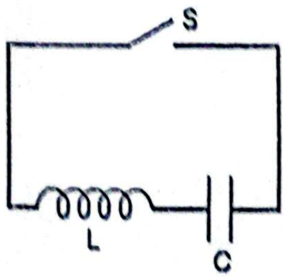
22-12 وُصل مكثف C ومقاومة R مع مصدر جهد متردد جهده 90 V وتردده 150 Hz على التوالي في دارة مغلقة، فإذا كان الجهد بين طرفي المقاومة 30 V والتيار المار فيها 1.2 A، احسب: (أ) المقاومة R، (ب): مواسعة المكثف C.

23-12 تتكون دارة الاستقبال في جهاز الراديو (جهاز الاستقبال اللاسلكي) كما هو مبين في الشكل (12-26) من سلك توصيل (هوائي) وملف L ومكثف متغير المواسعة C، فإذا تمكنت موجة كهرومغناطيسية ترددها 600 kHz من توليد قوة دافعة كهربائية تأثيرية بين الهوائي والأرضي مقدارها 0.1 mV وكانت L = 20 mH فما مقدار: (أ) مواسعة المكثف C، (ب) التيار المار في الملف L.

24-12 إذا علمت أنّ مقاومة الدارة في الشكل (12-27) تساوي صفراً، فاثبت أنّ الطاقة الكلية للدارة عند أي لحظة زمنية بعد غلق المفتاح S هي نفس الطاقة التي كانت مخزونة في المكثف أصلاً. (قبل إغلاق المفتاح).



الشكل (12-26)



الشكل (12-27)

25-12 أثبت رياضياً أنّ متوسط القيمة لجهد جيبي الشكل (sinusoidal) خلال دورة كاملة يساوي صفراً.