2.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و مختلفتين في التردد (الضربات)

يرتبط بهذا النوع من التراكب ظاهرة فيزيائية مهمة تسمى **الضربات (Beats)** والتي يمكن تعريفها على انها **نمط خاص من الحركة الدورية تحدث عندما يتأثر جسم آنياً بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترديديهما قليل عندها تكون سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن.**

نفرض ان لدينا جسيم يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلاً في التردد وعلى بعد واحد، نتيجة للاختلاف البسيط بين الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار بصرف النظر عن الطور الابتدائي للحركتين، وبالتالي يمكننا تجاهل الطور الابتدائي للحركتين في هذه الحالة. ولذلك يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية للجسيم في اللحظة (t) بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها (A_1) وترددها الزاوي (ω_1) بالصيغة:

$$x_1 = A_1 sin\omega_1 t$$

وبنفس الطريقة يمكننا التعبير عن الإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية (t) نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها (A_2) وترددها الزاوي (ω_2) بالصيغة:

$$x_2 = A_2 sin\omega_2 t$$

وفقاً لمبدأ التراكب فان الإزاحة الآنية للجسيم يساوي المجموع الجبري للإزاحتين للحركتين المتراكبتين، اي ان:

$$x = A_1 sin\omega_1 t + A_2 sin\omega_2 t$$

للسهولة نفرض ان سعتي الحركتين المتراكبتين متساويتان $(A_1 = A_2 = A)$ ومنه نحصل على:

$$x = A(sin\omega_1 t + sin\omega_2 t) \qquad (1)$$

من المتطابقات المثلثية لدينا:

$$sin\alpha + sin\beta = 2cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$$

بالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية (1) نحصل على:

$$x = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right] sin\left[\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t\right]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها كدالة جيبية بالصورة:

$$x = Bsin\left[\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t\right]$$

حيث B سعة الاهتزاز وهي في هذه الحالة معتمدة على الزمن وتعطى بالعلاقة:

$$B = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right]$$

ان العلاقة الأخيرة تمثل سعة الاهتزاز في حالة الضربات (B)، ويلاحظ ان سعة الاهتزاز متغيرة مع الزمن، حيث تتراوح قيمتها من الصفر إلى اعظم قيمة وهي $(2A)$.

للتوصل إلى فهم اعمق لتغير السعة في حالة الضربات ستقوم بحساب الفترة الزمنية الفاصلة بين اكبر واصغر سعتين متتاليتين وكما يلي:

أولاً: حساب الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين في حالة الضربات

ان سعة الاهتزاز في حالة الضربات تعطى بالصيغة:

$$B = 2Acos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right]$$

ان اعظم قيمة للسعة هي $(B_{max} = \pm 2A)$ وتحدث عندما:

$$B_{max} = \pm 2A \qquad when \qquad cos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right] = \pm 1$$

من خواص دالة الجيب تمام لدينا:

$$cos\alpha = \pm 1 \quad for\ \alpha = n\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

اي ان اعظم قيمة للسعة تحدث عندما :

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t = n\pi \quad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

بالتعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد $(\omega_1 = 2\pi f_1 , \omega_2 = 2\pi f_2)$ نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$2\pi\left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right)t = n\pi$$

$$(f_2 - f_1)t = n$$

$$t = \frac{n}{f_2 - f_1} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

$$t = \frac{0}{f_2 - f_1}, \frac{1}{f_2 - f_1}, \frac{2}{f_2 - f_1}, \frac{3}{f_2 - f_1}, \frac{4}{f_2 - f_1}, \frac{5}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$cos\alpha = 0 \quad for \quad \alpha = (n + \frac{1}{2})\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

حالتنا فان السعة تكون صفراً عندما يتحقق الشرط:

$$\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi \quad where \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

تعويض عن التردد الزاوي بدلالة التردد $(\omega_1 = 2\pi f_1)$ و $(\omega_2 = 2\pi f_2)$ نحصل على:

$$\left(\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi$$

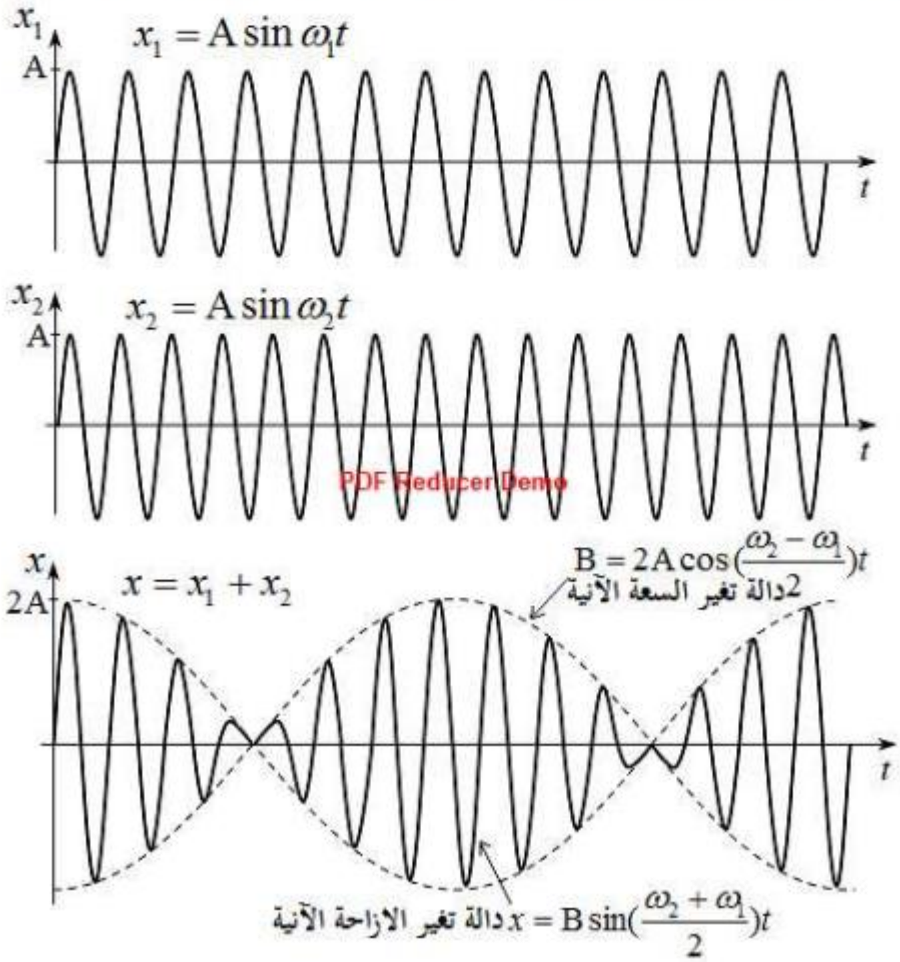
$$2\pi \left(\frac{f_2 - f_1}{2}\right) t = (n + \frac{1}{2})\pi$$

$$t = \frac{(n + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1} \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots$$

$$t = \frac{(0 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(1 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(2 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(3 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(4 + \frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$t = \frac{(\frac{1}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{3}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{5}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{7}{2})}{f_2 - f_1}, \frac{(\frac{9}{2})}{f_2 - f_1}, \dots \dots \dots \dots \dots$$

الشكل التالي يوضح التمثيل البياني لتراكب حركتين مختلفتين قليلاً في التردد في بعد واحد:



مثال (1): في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استعملت شوكتا رنين، تردد الأولى (250Hz) ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور ($5\,s$)، كيف يمكن إيجاد تردد الشوكة الثانية؟

الحل: لدينا من معطيات المسألة ($f_1 = 250Hz$) و ($T_b = 5sec$)

$$T_b = \left|\frac{1}{f_2 - f_1}\right| \quad , \quad f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{T_b}$$

$$f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{5}$$

$$f_2 = f_1 \pm 0.2$$

$$f_2 = 250 + 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 250 - 0.2$$

or

$$f_2 = 250 - 0.2 \quad \rightarrow \quad f_2 = 249.8\ Hz$$

مثال (2): احسب سرعة الصوت في غاز تولد فيه موجتان أطوالهما ($100cm$) و ($101cm$) 18 ضربة في 6 ثواني.

الحل: لدينا من معطيات المسألة

$$\lambda_1 = 100cm \ , \ \lambda_2 = 101cm$$

$$f_b = \frac{18}{6} = 3\ Hz$$

$$v = \lambda f \quad , \quad f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

$$f_1 = \frac{v}{100} \quad , \quad and \quad f_2 = \frac{v}{101}$$

$$f_b = |f_2 - f_1|$$

$$\left|\frac{v}{101} - \frac{v}{100}\right| = 3$$

$$v\left|\left[\frac{100 - 101}{(101)(100)}\right]\right| = 3$$

$$\frac{v}{10100} = 3$$

$$v = 30300\,\frac{cm}{sec} = 303\,\frac{m}{sec}$$

1-مبدأ التراكب

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في تحليل الحركات الموجية المعقدة إلى مركبات توافقية بسيطة، و ينص هذا المبدأ على انه **يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجتين أو اكثر ان تحدثا في نفس النقطة دون ان تؤثر احداهما في الأخرى، وتكون الإزاحة الآنية في تلك النقطة عبارة عن المجموع الجبري للازا حات الآنية للموجات المتراكبة**. وينطبق هذا المبدأ على الحركات التوافقية البسيطة.

يمكن أثبات ان حاصل تراكب أي حركتين توافقيتين بسيطتين هو حركة توافقية بسيطة، وكما يلي:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين، الأولى معبر عنها بالدالة (x_1) والثانية معبر عنها بالدالة (x_2). بما ان الدالة (x_1) تمثل حركة توافقية بسيطة (بالفرض)، لذا فهي تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة المعبر عنها بالصيغة $\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0\right]$ ، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_o^2 x_1 = 0 \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة فان الدالة (x_2) تحقق معادلة الحركة التوافقية البسيطة، وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_o^2 x_2 = 0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_o^2 (x_1 + x_2) = 0 \qquad (3)$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج ان$(x_1 + x_2)$ تمثل حلاً لمعادلة المهتز التوافقي، وبتعبير آخر ان حاصل جمع حركتين توافقيتين هو أيضا حركة توافقية، وبشكل عام فان اي تركيب خطي يضم حركتين

توافقيتين ينتج عنه حركة توافقية ثالثة.

2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد:

ان أي حركة توافقية بسيطة يتم وصفها بدلالة سعة (A) والتردد الزاوي (ω_o) والطور الابتدائي (θ_o) للاهتزاز $[x = Asin(\omega_o t + \theta_o)]$، وللسهولة نبدأ أولا بدراسة تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد ولهما نفس التردد، ومن ثم ندرس تراكب حركتين توافقيتين مختلفتين في التردد والتي ترتبط بظاهرة فيزيائية مهمة تعرف بالضربات.

1.2.3 تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين في بعد واحد و لهما نفس التردد:

نفرض ان لدينا حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد الزاوي على امتداد المحور x معرفين بالعلاقتين: $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)\,,\ x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$

حيث تمثل x_1 , x_2 الإزاحة الآنية للحركتين، a_1 a_2 سعتي الحركتين، θ_1 ، θ_2 زاويتي الطور الابتدائي للحركتين، ω هو التردد الزاوي للحركتين، ان تراكب الحركتين تعطى بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta_1) + a_2\, sin(\omega t + \theta_2) \qquad (1)$$

من المتطابقة المثلثية الخاصة بمفكوك جيب حاصل جمع زاويتين لدينا:

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

وبالتعويض عن المفكوك في العلاقة (1) نحصل على:

$$x = a_1[sin\omega t cos\theta_1 + cos\omega t sin\theta_1] + a_2[sin\omega t cos\theta_2 + cos\omega t sin\theta_2]$$

$$x = a_1 sin\omega t cos\theta_1 + a_1 cos\omega t sin\theta_1 + a_2 sin\omega t cos\theta_2 + a_2 cos\omega t sin\theta_2$$

$$x = [a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2]sin\omega t + [a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2]cos\omega t \qquad (2)$$

وحيث ان كل من a_1 ، a_2 ، θ_1 ، θ_2 هي ثوابت ، لذا يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$Acos\theta = a_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2 \qquad (3)$$

$$Asin\theta = a_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2 \qquad (4)$$

حيث A ، θ هي ثوابت، وبتعويض المعادلة (3) و (4) في المعادلة (2) نحصل على:

$$x = Acos\theta sin\omega t + Asin\theta cos\omega t$$

$$x = A[sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta]$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها بالصورة:

$$x = Asin(\omega t + \theta) \qquad (5)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد في بعد واحد، ويلاحظ انها تشبه معادلة الحركتين الأصليتين حيث انها معادلة حركة توافقية لها نفس التردد الزاوي الحركتين الأصليتين (ω)، وتختلف عنهما بالسعة (A) والطور الابتدائي (θ). واللذان يمكن حسابهما بدلالة السعة والطور الابتدائي للحركتين الأصليتين وكما يلي:

لإيجاد السعة (A) نقوم أولا بتربيع طرفي المعادلة (3) و (4) فنحصل على:

$$A^2cos^2\theta = a_1^2cos^2\theta_1 + 2a_1a_2cos\theta_1cos\theta_2 + a_2^2cos^2\theta_2$$
$$A^2sin^2\theta = a_1^2sin^2\theta_1 + 2a_1a_2sin\theta_1sin\theta_2 + a_2^2sin^2\theta_2$$

بجمع المعادلتين الأخيرتين وترتيب الحدود نحصل على:

$$A^2[sin^2\theta + cos^2\theta] = a_1^2[sin^2\theta_1 + cos^2\theta_1] + a_2^2[sin^2\theta_2 + cos^2\theta_2] + 2a_1a_2[cos\theta_1cos\theta_2 + sin\theta_1sin\theta_2]$$

وبالاستفادة من المتطابقتين المثلثيتين:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad , \quad cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

بالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)$$

حيث تمثل $(\theta_1 - \theta_2)$ زاوية الفرق بين الطورين الابتدائيين (θ_1 , θ_2) وبجذر الطرفين نحصل على:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (6)$$

العلاقة الأخيرة تعبر عن سعة الحركة التوافقية الناتجة من تراكب حركتين توافقيتين في بعد واحد، وهي تعتمد على سعة والطور الابتدائي للحركتين المتراكبتين الأصليتين.

اما بخصوص الطور الابتدائي للحركة التوافقية الناتجة من تراكب الحركتين، فيمكن حسابه من خلال قسمة المعادلة (4) على المعادلة (3) وكما يلي:

$$\frac{Asin\theta}{Acos\theta} = \frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}$$
$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right] \qquad (7)$$

المعادلة الأخيرة تعطي الطور الابتدائي للحركة الناتجة من تراكب الحركتين بدلالة سعتي و طوري الحركتين المتراكبتين الأصليتين.

نستنتج مما سبق ان تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد في بعد واحد، الأولى معرفة بالصيغة $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)$ والثانية معرفة بالصيغة $x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$ هي حركة توافقية لها نفس التردد ويعبر عنها بالصيغة $x = A\, sin(\omega t + \theta)$ حيث يعطى السعة والطور الابتدائي لها بدلالة سعة والطور الابتدائى للحركات التوافقية الأصلية بالصيغة:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{a_1sin\theta_1 + a_2sin\theta_2}{a_1cos\theta_1 + a_2cos\theta_2}\right]$$

وبالتالي يمكننا ان نجد الحركة التوافقية الناتجة من تراكب اي حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وفي بعد واحد، ولنناقش الآن تراكب حالتين خاصتين وهي:

أولاً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد والطور في بعد واحد

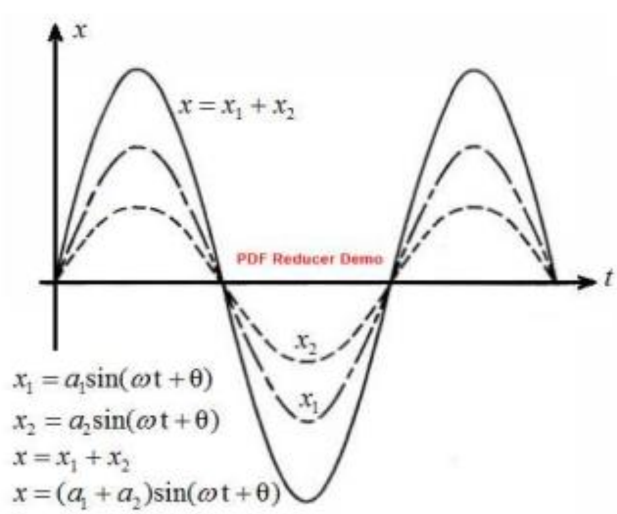
في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد والطور $(\theta_1 =_2= \theta)$ وعندها يمكن التعبير عن الحركتين المتراكبتين بالصيغة: $x_1 = a_1\, sin(\omega t + \theta_1)$, $x_2 = a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2$$
$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta_1) + a_2\, sin(\omega t + \theta_2)$$

But we have; $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$x = a_1\, sin(\omega t + \theta) + a_2\, sin(\omega t + \theta)$$
$$x = (a_1 + a_2)\, sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد والطور في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي المجموع الجبري لسعة الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل البناء (constructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

ثانياً: تراكب حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وبينهما فرق الطور (π) في بعد واحد

في هذه الحالة يكون للحركتين الأصليتين نفس التردد وبينهما فرق في الطور مقداره $(\Delta\theta = \pi)$ ويقال عندها ان الحركتين متعاكستين في الطور، فاذا فرضنا ان الحركة التوافقية الأولى معبر عنها بالصيغة:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta)$$

فان الحركة التوافقية الثانية يكون تعبيرها بالصيغة:

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

اما الحركة الناتجة من تراكب الحركتين فيمكن التعبير عنها بالصيغة:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \theta) + a_2 \sin(\omega t + \theta - \pi)$$

من العلاقات المثلثية لدينا $\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$ نحصل على:

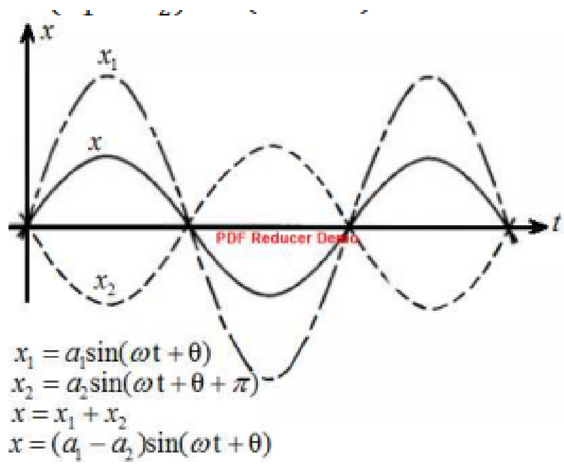
$$\sin(\omega t + \theta - \pi) = -\sin(\omega t + \theta)$$

وبالتعويض في معادلة الإزاحة الآنية نحصل على:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta) - a_2 \sin(\omega t + \theta)$$

ومنه نحصل على:

$$x = (a_1 - a_2) \sin(\omega t + \theta)$$



من العلاقة الأخيرة نستنتج ان ناتج تراكب حركتين توافقيتين لها نفس التردد وبينهما فرق طور (π) في بعد واحد هو حركة توافقية لها نفس التردد والطور وبسعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين الأصليتين. ولهذا يسمى هذا النوع من التراكب بالتداخل الاتلافي (الهدام) (destructive interference) وكما هو موضح بالشكل المجاور.

في حالة كون السعتين متساويتين $(a_1 = a_2)$ والتداخل اتلافي فان الحركتين تلغي احدهما الأخرى.